

پیشکش - انواری



خداوند
سبحانه
و تعالی

چاپ اولی - ۱۴۴۶

شرکت سهامی چاپ

فصل دوم (۴)

۳۸۵

حق چاپ و استفاده از کلیشه ها
محفوظ است

0002

M.A. LIBRARY, A.M.U.



PE3285

زنگنه‌های کتاب



لب کتاب را بطوریکه
در شکل بالا می بینید
کمی باز کنید؛ نشانی
سیاهی که در مقابل
علامت ... این صفحه
بمخازات هر قسمت
نمودار میشود صفحه اول
آن قسمت از مطالب
کتاب است انگشت
شست درست چپ را روی
نشانی سیاه بگذارید
و قسمتی را که
میخواهید باز کنید.

حساب

از صفحه ۱ تا صفحه ۳۸

جبر

از صفحه ۳۹ تا ۱۲۸

مثال‌ات

از صفحه ۱۲۹ تا ۱۶۳

هندسه

از صفحه ۱۶۴ تا ۲۳۶

مختصر و طالت

از صفحه ۲۳۶ تا ۲۵۴

مکانیک

از صفحه ۲۵۴ تا ۳۱۹

هندسه و قومی و ترمیمی

از صفحه ۲۵۴ تا ۲۸۳

هیئت

از صفحه ۳۰۲ تا ۳۴۹

اهداء کتاب

این کتاب را بکسانی که برای
پیشرفت فرهنگ کمر همت
بسته و با روحی پاک در این
راه مردانه می‌گوشند تقدیم
می‌کنیم

فہرست

موضوع

قابلیت تقسیم بر ۲ و ۳ و ۴

قابلیت تقسیم بر ۵ و ۹ و ۱۱

۱- اعداد اول

اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰

۲- بزرگترین مقسوم علیه مشترک

تعیین هم از راه نردبانی

» » از راه تجزیه

۳- کوچکترین مضرب مشترک

تعیین کسرها از راه تجزیه

۴- کسر

کسر متعارفی و اعشاری

کسر نما

خواص عمومی

چهار عمل اصلی در کسر

تبدیل کسر اعشاری به متعارفی

و بالعکس

کسر متناوب

۵- نسبت و تناسب

[illegible]

موضوع	صفحه
وا-طه عددی	۱۹
XIV- مقیاسها	۲۰
واحد طول در دستگاه متری	۲۰
واحد سطح در دستگاه متری	۲۰
» حجم	۲۱
» پیمانه	۲۱
» وزن	۲۱
رابطه بین وزن و حجم	۲۲
وزن مخصوص	۲۲
واحد پول	۲۲
XV- مقیاسهای سابق ایران	۲۴
واحد طول	۲۴
» وزن	۲۴
رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم	۲۴
واحد زمان	۲۵
اقسام سال	۲۵
تعدیل	۲۵
مطابقت تاریخها	۲۶
XVI- اعداد مرکب	۲۶
چهار عمل اصلی در اعداد مرکب	۲۶ و ۲۷
XVII- اربعه متناسبه	۲۷
تناسب مستقیم و معکوس	۲۸

موضوع	صفحه
XVIII- آمیزه	۲۸
آلیاژ	۲۹
XIX- مرا بهاء مفرد	۲۹
فورمولهای مرا بهاء	۲۰
XX- تنزیل	۲۰
فورمول تنزیل	۲۱
XXI- چند	۲۱
استخراج چند اعداد صحیح	۲۲
» » » اعشاری	۲۳
تقریب	۲۳
امتحان چند	۲۴
XXII- کعب	۲۴
استخراج کعب اعداد صحیح	۲۵
» » » اعشاری	۲۶
XXIII- اعداد اصم	۲۶
ضرب و تقسیم ریشه دوم (چند)	۲۷
جبر	
I- تعاریف	۲۹
حروف و نشانه ها	۲۹
عدد جبری	۴۰
عبارت جبری	۴۱
اتحاد	۴۱

موضوع	صفحه
معادله	۴۱
یکجمله	۴۱
ضرب	۴۱
چند جمله	۴۲
I - جمع اعداد جبری	۴۲
II - تفریق اعداد جبری	۴۲
IV - ضرب اعداد جبری	۴۲
V - تقسیم اعداد جبری	۴۲
VI - قوه (توان)	۴۲
ضرب و تقسیم قوا	۴۳
قوه کسری	۴۴
قوه منفی	۴۴
VII - جمع جمل جبری	۴۵
VIII - تفریق جمل جبری	۴۵
IX - ضرب جمل جبری	۴۵
X - تقسیم جمل جبری	۴۶
قابلیت تقسیم کثیرالاجمله از	۴۷
از (\pm)	۴۷
XI - اتحاد های مهم ۴۷ و ۴۸	۴۸
XII - ریشه و ریشه گی	۴۹
ریشه اعداد جبری	۴۹
تحویل چند ریشه گی بیک	۵۰
نمایشه	۵۰
ضرب و تقسیم ریشه گی	۵۰

موضوع	صفحه
گویا نمودن کسر اصم	۵۲
XIII - معادلات	۵۲
خواص معادلات	۵۲
حل و بحث معادلات درجه اول	۵۲
حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول	۵۴
معادله درجه دوم	۵۵
روابط بین ضرائب و ریشه های معادله درجه دوم	۵۵
حاصل جمع قوای متشابه ریشه های معادله درجه	۵۶
علامت ریشه های معادله درجه دوم	۵۶
XIV - سه جمله درجه دوم	۵۸
مقایسه يك يا دو عدد با ریشه های سه جمله درجه دوم	۵۹
مقایسه ریشه های دو سه جمله	۵۹ و ۶۰
XV - معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم	۶۱
معادله دو مجهوری	۶۱
معادلات معکوسه	۶۱
حل معادلات معکوسه	۶۲

موضوع صفحه

معادلات معکوسه درجه ۲ و ۳	۶۲
۴ و ۵	۶۴
معادلات اصم	۶۵
XXVI - نامساوی	۶۵
خواص نامساوی	
نامساوی درجه اول يك	۶۵
مجهول	۶۶
نامساوی درجه دوم	۶۶
نامساوی درجه نام	۶۷
نامساوی کسری	۶۷
XXVII - تصاعد حسابی	۶۹
XXVIII - تصاعد هندسی	۷۰
XXIX - لگاریتم	۷۱
خواص لگاریتم	۷۴
چهار عمل اصلی در لگاریتم	۷۶
جدولهای لگاریتم	
مافتیس لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰	۷۷
XXX - ربح مرکب	۷۸
XXXI - قسط السنین	۸۰
XXXII - نمایش هندسی	۸۱
مختصات دکارتی	۸۲
مختصات قطبی	
یستگی بین مختصات قطبی	

موضوع صفحه

و قائم	۸۲ و ۸۳
مختصات کروی	۸۳
تغییر محورهای مختصات	۸۴
دوران دورها	۸۴
طول قطعه خط	۸۵
تقسیم خط به نسبت K	۸۵
رابطه شال	۸۶
رابطه فیثاغورث	۸۶
« اول	۸۶
« استوارت	۸۷
XXXIII - متغیر و تابع	۸۷ و ۸۸
اقسام تابع	۸۸
XXXIV - حدود	۸۹
خواص حدود	۸۹
XXXV - رفع ابهام	۹۱
XXXVI - مشتقات	۹۲
محاسبه مشتق	۹۳
مشتق توابع متداول	۹۵
خواص مشتق	۹۵
رفع ابهام بوسیله مشتق	۹۶
XXXVII - تغییرات توابع	۹۶
تغییرات تابع درجه اول	۹۷
ماکزیمم و مینیمم	۹۸
تغییرات تابع درجه دوم	

موضوع	صفحه
تغییرات تابع دو معذوری ۹۹	۹۹
xxxvii - نمایش هندسی توابع ۱۰۱	۱۰۱
نمایش تغییرات تابع درجه اول	۱۰۱
ضریب زاویه‌ای	۱۰۲
زاویه دو خط	۱۰۲
معادله خط مارپریک یا دو نقطه	۱۰۲
فاصله نقطه از خط	۱۰۴
رسم خط	۱۰۴
فصل مشترک دو خط	۱۰۴
مجانیه‌ها	۱۰۴
قاعدہ برای پیدا کردن مجانیه‌ها	۱۰۵
تقعر و تحدب	۱۰۶
نقطه عطف	۱۰۶
مرکز و محور تقارن	۱۰۷
طری تعیین محور تقارن	۱۰۷
» » مرکز تقارن	۱۰۸
ماس بر منحنی	۱۰۹
ضریب زاویه ای ماس بر منحنی	۱۰۹
رسم ماس بر منحنی	۱۰۹
رسم منحنی	۱۱۰

موضوع	صفحه
xxix - حل معادلات یوسيله رسم منحنی	۱۱۴
xxx - حل نامعادلات یوسيله منحنی	۱۱۵
حل دستگاه نامعادلات	۱۱۶
xxxxi - تابع اولیه	۱۱۶
سطح منحصر	۱۱۸
مقدم جبر	۱۱۸
xxxxii - معادله منحنی های منحصر	۱۱۹
معادله دایره	۱۱۹
» بیضی	۱۱۹
» هذلولی	۱۲۰
» معادله سهمی	۱۲۰
xxxxiii - حل معادلات دو جمله سه جمله	۱۲۰
xxxxiv - قاعدہ بزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول	۱۲۱
xxxxv - معادلات مجهول القوی و لگاریتمی	۱۲۳
xxxxvi - تجزیه رادیکالهای مرکب	۱۲۴
حل معادله درجه سوم	۱۲۵

موضوع صفحه

مثلثات

۱۲۹	I- کلیات
۱۲۹	اندازه قوس
۱۳۰	رابطه بین درجه و گراد و
۱۳۰	رادیان
۱۳۱	دائره مثلثاتی
۱۳۱	قضیه شال
۱۳۱	قوسهای متمم و مکمل
۱۳۲	II- خطوط مثلثاتی
۱۳۲	روابط بین خطوط مثلثاتی
۱۳۳	یک قوس
	روابط بین خطوط مثلثاتی
	قوسهایی که تفاضل یا مجموعشان
۱۳۴	مضرب π باشند
	روابط بین قوسهای مقابل به
۱۳۵	یک خط مثلثاتی
	جدول خطوط مثلثاتی برخی
۱۳۶	قوسهای مهم
۱۳۶	دوره تناوب خطوط مثلثاتی
	جمع و تفریق و ضرب و
۱۳۶	تقسیم قوسها
۱۳۶	تصویر بر محور
	خطوط مثلثاتی مجموع یا

موضوع

صفحه

۱۳۷	تفاضل دو قوس
۱۳۷	خطوط مثلثاتی مجموع سه
۱۳۷	قوس
۱۳۷	خطوط مثلثاتی قوسهایی که
۱۳۷	مضرب یک قوس هستند
۱۳۷	خطوط مثلثاتی یک قوس
۱۳۸	بر حسب ظل نصف آن
	خطوط مثلثاتی یک قوس
۱۳۸	بر حسب جیب دو برابر آن
	محاسبه $1/2a$ بر حسب $1/2a$
۱۳۹	IV- لگاریتمی کردن
	تبدیل مجموع یا تفاضل دو
۱۴۰	خطوط مثلثاتی بحاصل ضرب
	تبدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی
۱۴۰	بمجموع یا تفاضل
	تبدیل برخی عبارات مثلثاتی
۱۴۱	بحاصل ضرب
	حل معادله درجه دوم
۱۴۲	بطریق مثلثاتی
	V- روابط بین اجزاء
۱۴۲	مثلث
۱۴۲	مثلث قائم الزاویه
۱۴۳	مثلث غیر مشخص

موضوع	صفحه
روابط بین اجزاء اصلی و	
فرعی مثلث	۱۴۲
مساحت مثلث	۱۴۴
ارتفاعات «	۱۴۴
مصفف الزاویه ها	۱۴۵
میانیه ها	۱۴۵
روابط بین اجزاء مختلف	۱۴۶
VI - معادلات مثلثاتی	۱۴۶
معادلات يك مجهولی	۱۴۷
قاعده بیوش	۱۴۷
حل معادلات کلاسیک	۱۴۸
معادلات چند مجهولی	۱۵۱
VII - نامعادلات مثلثاتی	۱۵۲
VIII - حل مثلث	۱۵۴
تعادل دستگاهها	۱۵۵
حل مثلث قائم الزاویه	۱۵۶
حل مثلث غیر مشخص	۱۵۷
IX - چهاربرهای گوی	۱۵۸
روابط بین اجزاء چهاربر	
محاطی	۱۵۹
X - استعمال مثلثات در نقشه	
بررداری	۱۶۰
مسئله نقشه	۱۶۲

موضوع	صفحه
هندسه	
I - تعاریف	۱۶۴
II - زوایا و خطوط عمود	
برهم	۱۶۵
اندازه زاویه	۱۶۶
اقسام زوایا	۱۶۶
حالات برابری زوایا	۱۶۸
III - چند برها	۱۶۸
قضایای مربوط به چند برها	۱۶۸
IV - مثلث	۱۶۹
قضایای مربوط به مثلث	۱۷۰
حالات برابری مثلثها	۱۷۰
تناسب و تشابه در مثلث	۱۷۲
قضیه طالس	۱۷۴
قضایای مربوط به تشابه مثلث	۱۷۴
خواص منصف الزاویه	۱۷۴
قضیه استوارت	۱۷۵
روابط بین اجزاء مختلف	۱۷۵
دایره های محیطی و محاطی	۱۷۷
موریات	۱۷۷
قضیه منلائوس	۱۷۹
قضیه سوا	۱۷۹
V - چهاربر	۱۷۹

موضوع	صفحه
متوازی الاضلاع	۱۸۰
لوزی	۱۸۱
مستطیل و مربع	۱۸۱
ذوزنقه	۱۸۱
چهار بر محیطی و مماسی	۱۸۲
قضیه بطلامیوس	۱۸۲
چهار بر کامل	۱۸۳
قضیه گوس	۱۸۳
قضیه پایوس	۱۸۳
VII - چند برهای منتظم	۱۸۳
طول ضلع و ارتفاع چند	
چند بر منتظم	۱۸۴
مساحت چند بر منتظم	۱۸۵
مساحت چند بر نامنتظم	۱۸۵
VII - دایره	۱۸۶
اوضاع نسبی دودایره	۱۸۶
اندازه زاویه	۱۸۶
قوس و وتر	۱۸۷
رسم مماس بر دایره	۱۸۸
جدول تعداد مماسهای مشترک	
دودایره	۱۸۸
قاعده رسم مماس مشترک	
داخلی و خارجی	۱۸۹
قوت نقطه نسبت بدایره	۱۸۹

موضوع	صفحه
محور اصلی	۱۹۰
حل و بحث معادله درجه دوم	۱۹۱
دوایر عمود بر هم	۱۹۱
محیط و مساحت دایره	۱۹۲
محاسبه π	۱۹۲
مساحت دایره و قطعه و قطاع	۱۹۳
VIII - بردارها	۱۹۳
قضیه شال	۱۹۴
مجموع و تفاضل هندسی چند	
بردار	۱۹۴
تصاویر بردارها	۱۹۵
IX - موربات	۱۹۵
قضیه باسکال	۱۹۵
قضایای منلائوس و سوا	۱۹۶
X - تقسیم توافقی	۱۹۶
اشعه توافقی	۱۹۷
XI - تقارن	۱۹۷
تقارن مرکزی	۱۹۷
تقارن محوری	۱۹۸
XII - تشابه	۱۹۹
XIII - تجانس	۱۹۹
قضیه دالامیر	۲۰۰
XIV - تغییر مکان در سطح	۲۰۱
انتقال	۲۰۱

موضوع	صفحه
دوران	۲۰۲
XV - خط و صفحه	۲۰۲
وضع دو خط	۲۰۴
وضع دو صفحه	۲۰۴
وضع سه صفحه	۲۰۵
قضیه سه عمود	۲۰۶
رسم عمود مشترک	۲۰۷
XVI - فرجه ها	۲۰۷
تصویر بر صفحه	۲۰۸
خط یزد گترین شیب	۲۰۹
XVII - تقارن در فضا	۲۰۹
XVIII - تجانس در فضا	۲۱۱
IX - تشابه در فضا	۲۱۲
XX - تغییر مکان در فضا	۲۱۲
انتقال	۲۱۴
دوران	۲۱۴
حرکت مارپیچی	۲۱۵
XXI - چندروها	۲۱۵
قضیه اولر	۲۱۷
اجسام افلاطونی	۲۱۷
منشور و هرم	۲۱۷
مکعب و مکعب مستطیل	۲۱۷
شبه منشور	۲۱۹

موضوع	صفحه
استوانه و مخروط	۲۰۲
و کره	۲۰۲
سطح دوار	۲۰۴
سطح استوانی	۲۰۴
سطح کروی	۲۰۵
استوانه و مخروط	۲۰۶
کره	۲۰۷
تعیین شعاع کره	۲۰۷
XXIII - سه بر کروی	۲۰۸
سه بر قطبی	۲۰۹
XXIV - قوت نقطه نسبت	۲۰۹
بکره	۲۱۱
XXV - قطب و قطبی در	۲۱۲
صفحه	۲۱۲
اشکال قطبی معکوس	۲۱۴
قطب و قطبی در فضا	۲۱۴
XXVI - انعکاس در صفحه	۲۱۵
انعکاس در فضا	۲۱۵
XXVII - مناظر و مرایا	۲۱۷
تصویر مرکزی	۲۱۷
XXVIII - مارپیچ	۲۱۷
مماس بر مارپیچ	۲۱۷
معادله مارپیچ	۲۱۹

موضوع	صفحه
استوانه و مخروط	۲۰۲
و کره	۲۰۲
سطح دوار	۲۰۴
سطح استوانی	۲۰۴
سطح کروی	۲۰۵
استوانه و مخروط	۲۰۶
کره	۲۰۷
تعیین شعاع کره	۲۰۷
XXIII - سه بر کروی	۲۰۸
سه بر قطبی	۲۰۹
XXIV - قوت نقطه نسبت	۲۰۹
بکره	۲۱۱
XXV - قطب و قطبی در	۲۱۲
صفحه	۲۱۲
اشکال قطبی معکوس	۲۱۴
قطب و قطبی در فضا	۲۱۴
XXVI - انعکاس در صفحه	۲۱۵
انعکاس در فضا	۲۱۵
XXVII - مناظر و مرایا	۲۱۷
تصویر مرکزی	۲۱۷
XXVIII - مارپیچ	۲۱۷
مماس بر مارپیچ	۲۱۷
معادله مارپیچ	۲۱۹

موضوعات

صفحه

۱ - بیضی	۲۳۶
رسم بیضی	۲۳۷
فصل مشترک خط و بیضی	۲۳۸
ماس بر بیضی	۲۳۹
شعاعهای حامل - معادله بیضی	۲۴۱
بیضی تصویر دایره است	۲۴۱
مساحت بیضی	۲۴۱
II - هندلوی	۲۴۲
رسم هندلوی	۲۴۲
فصل مشترک خط و هندلوی	۲۴۴
ماس بر هندلوی	۲۴۴
رسم ماس بر هندلوی	۲۴۴
مجاانبهای هندلوی	۲۴۵
شعاعهای حامل - معادله هندلوی	۲۴۵
III - سهمی (شلیجی)	۲۴۶
رسم سهمی	۲۴۶
فصل مشترک خط و سهمی	۲۴۸
ماس بر سهمی	۲۴۸
رسم ماس بر سهمی	۲۴۹
شعاعهای حامل - معادله سهمی	

موضوع

صفحه

مساحت سهمی	۲۵۰
۱۷ - خواص مشترک بیضی و هندلوی و سهمی	۲۵۱
رسم ماس	۲۵۲
مقاطع مخروطی	۲۵۲
هندسه رقی می و توهمی کلیات	۲۵۴
۱ - اصول هندسه رقی می	۲۵۵
I - نقطه	۲۵۵
مقیاس	۲۵۵
II - خط مستقیم	۲۵۶
شیب و اساس	۲۵۶
تسطیح سطح قائم بر افق	۲۵۷
تعیین رقوم نقطه ای از خط	۲۵۷
تعیین زاویه خط با سطح مقایسه	۲۵۸
وضع دو خط	۲۵۸
III - صفحه	۲۵۹
خط بزرگترین شیب	۲۵۹
توازی خط و صفحه	۲۶۰
توازی دو صفحه	۲۶۰
تقاطع صفحات	۲۶۰
تقاطع خط و صفحه	۲۶۰
خط عمود بر صفحه	۲۶۰

صفحه	موضوع
۲۷۷	زاویه دو خط
۲۷۷	زاویه خط و صفحه
۲۷۷	زاویه دو صفحه
۲۷۷	رسم خطی که با ادق زاویه α تشکیل دهد
۲۷۸	رسم خطی در صفحه که با افق زاویه α تشکیل دهد
۲۷۹	زاویه صفحه با صفحات تصویر
۲۸۹	زاویه خط با صفحات تصویر
۲۷۹	نمایش چند روها
۲۸۰	خطوط مرئی و مخفی
۲۸۱	مقطع اجسام
۲۸۱	فصل مشترك خط و چند رو
۲۸۲	سایه ها
	مکانیک
۲۸۴	I بردارها و عزم
۲۸۴	عزم مرکزی
۲۸۶	عزم محوری
۲۸۷	عزم بردار نسبت به صفحه
	علم الحركات
۲۸۸	I - تعاریف
	II - حرکت مستقیم الخط
۲۸۹	متشابه

صفحه	موضوع
۲۶۱	تسطیح
۲۶۳	۲- اصول هندسه ترسیمی
۲۶۳	I - نقطه
۲۶۴	II - خط مستقیم
۲۶۴	خطوط مهم
۲۶۵	نقاط مهم
۲۶۵	توازی دو خط
۲۶۵	نقاط دو خط
۲۶۵	III - صفحه
۲۶۵	خطوط مهم صفحه
۲۶۶	صفحات مهم
۲۶۷	توازی خط و صفحه
۲۶۷	خط عمود بر صفحه
۲۶۷	فصل مشترك دو صفحه
۲۶۷	فصل مشترك خط و صفحه
۲۶۸	IV - تغییر مکان
۲۶۸	I - تغییر صفحه
۲۷۰	پ - دوران
۲۷۲	پ - تسطیح
۲۷۵	۳ - موارد استعمال
۲۷۵	عمود مشترك دو خط
۲۷۵	فاصله دو نقطه
۲۷۶	فاصله نقطه از صفحه
۲۷۶	فاصله نقطه از خط

موضوع	صفحه
حرکت در امتداد قائم	۲۰۱
حرکت سهمی شکل	۲۰۲
۷III - حرکت نقطه مادی	۲۰۳
غیر آزاد	
حرکت نقطه بر سطح	
مورب	۲۰۴
XX - کار	۲۰۶
XX - قوه حیه	۲۰۶
XXI - استاتیك اجسام صلب	۲۰۷
XXII - اعمال مقدماتی	۲۰۸
XXIII - مرکز ثقل	۲۰۹
مختصات مرکز ثقل	۲۱۰
مرکز ثقل خطوط و	۲۱۱
سطوح و اجسام مختلف تا	۲۱۲
قضیه گولدن	۲۱۲
XXIV - شرط تعادل اجسام صلب	
آزاد	۲۱۳
XXV - شرط تعادل جسم صلب غیر	
آزاد	۲۱۴
کثیر الاضلاع اتکاء	۲۱۵
XXVI - ماشینهای ساده	۲۱۵
اهرمها	۲۱۵
چرخ چاه	۲۱۶
کریك یا جك	۲۱۷

موضوع	صفحه
III - حرکت مستقیم الخط	
متغیر	۲۸۹
IV - حرکت متشابه تغییر	۲۹۰
V - حرکت نوسانی ساده	۲۹۱
VI - حرکت منحنی الخط متشابه	۲۹۱
هدگراف	۲۹۲
VII - حرکت مستدیر متغیر	۲۹۲
VIII - حرکت مستدیر متشابه	۲۹۳
IV - تغییر دستگاه قایمه	۲۹۳
X - حرکت انتقالی	۲۹۴
XI - دوران	۲۹۴
علم القوی	
XI - تعاریف	۲۹۵
XIII - تعادل نقطه مادی	۲۹۷
XIV - استاتیك نقطه آزاد	۲۹۷
رابطه استون	۲۹۸
XV - استاتیك نقطه غیر آزاد	۲۹۸
فشار و عکس العمل	۲۹۹
اصطكاك	۲۹۹
قوانین اصطكاك	۳۰۰
XXVI - دیناميك نقطه	۳۰۰
دستورهای اصلی دیناميك	۳۰۰
XXVII - حرکت نقطه مادی	
آزاد	۳۰۱

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
قرقره	۳۱۸	معادله زمان	۳۳۸
آحاد علمی مستعمل در		تقویم مصری	۳۳۹
ریاضیات		تقویم قیصری	۳۳۹
هیچکس		تقویم گرگوارى	۳۴۰
۱- کلیات	۳۴۰	تقویم جلایى	۳۴۰
۱۱- مختصات گروی	۳۴۳	تقویم قمری	۳۴۱
مختصات سمتیه	۳۴۳	VII - ماه	۳۴۱
ارتفاع قطب	۳۴۴	VIII - خسوف و کسوف	۳۴۲
مختصات معدلی	۳۴۴	خسوف	۳۴۲
تعیین فاصله قطبى	۳۴۴	کسوف	۳۴۵
مختصات منطقه‌ی	۳۴۵	IX - قوانین هیئت	۳۴۶
۱۱۱ - زمین	۳۴۵	قوانین کپلر	۳۴۶
۱۷ - نقشه‌های جغرافی	۳۴۸	قانون نیوتن	۳۴۶
V - خورشید	۳۴۴	X - سیارات	۳۴۷
تعیین نقاط اعتدال	۳۴۵	قانون بد	۳۴۷
VI - زمان و تقویم	۳۴۶	جدول مشخصات سیارات عمده	۳۴۸
فصول	۳۴۸	« ایما دو جرم »	۳۴۹

مقدمه

رشته‌های مختلف علوم ، خاصه علوم ریاضی ، چنان
پیچیده‌تر بستگی دارند که در موارد بسیار فهم و درك مطلبی
در يك رشته به مراجعه مطالب متنوع در رشته های دیگر
محتاج میباشد .

از این روی طالب علم باید کتابهای متعدد در دسترس
خود داشته باشند و گاه و بیگاه با آنها مراجعه کند .
این کار برای کسانی که با تفنن و فراغ خاطر بمطالعه
میرد از تند دشواری نیست ، اما برای جوانانی که در دوره های
متوسطه و عالی بکسب دانش مشغولند جای آن نیست که
مقدار زیادی از وقت گرانیهایشان که باید برای فرا گرفتن
مواد درسی مصروف شود به تجسس در کتاب های مختلف
صرف گردد .

ما ، برای اینکه خدمت و کمکی بدانند آموزش آموزان و

دانشجویان جوان کرده باشیم ، آنچه در رشته های مختلف ریاضیات مقدماتی باید آموخت یکجا گردآورده و در يك مجلد در دسترس آنان قرار میدهیم .

در این مجموعه نظری بیر نامه کنونی تحصیلات متوسطه نداشته و مطالب کتاب را بر طبق آن مرتب نکرده ایم ، بلکه آنچه در حساب ، جبر ، هندسه و مخروطات ، هندسه های ر قومی و تر سیمی ، مثلثات ، مکانیک و هیئت باید آموخته شود بطور مختصر ، و شاید مفید ، جمع آوری نموده ایم . برای هیچيك از مطالب اقامه دلیل و برهان نکرده ایم چه در این صورت کتاب بسیار مفصل میشد و جا دادن مطالب در يك مجلد میسر نمیگردید .

این کتاب که با قطع كوچك تهیه شده بهترین رفیق شفیق جوان دانشجویست و مطالبی را که وی از کتابهای متعدد آموخته است یاد آوری میکند و او را در اینک هر لحظه بکتابهای مختلف درسی مراجعه کند بی نیاز میسازد . همه جا همراه او ، همیشه در دسترس او و در هر لحظه طرف مراجعه او میتواند بود .

ما بسیار کوشیده‌ایم که کتاب حاضر را کامل و جامع تهیه و تدوین کرده باشیم ، ولی تردیدی نداریم که نقص‌های بسیار دارد و تکمیل آن محتاج بر راهنمایی و کمک همکاران عزیز و معلمان دانشمند می‌باشد .

این کار هرچند بظواهر خرد باشد ، شگرفتر از آن نیست که بتوانیم ادعا کنیم که آنرا چنانکه شایسته است انجام داده‌ایم چنین داعیه‌ای نداریم و از دبیران فاضل خواستاریم که ما را بمعایب و نواقص کتاب واقف سازند تا در چاپهای بعد اثری مفید تر و جامع تر در دسترس اهل طلب قرار داده شود .

امیدواریم تا چاپهای دیگر کتاب ، چاپخانه های مسا بوسایل چاپ کتب ریاضی مجهزتر شوند تا نواقصی هم که از حیث حروف و علامات ریاضی ، یا احیاناً گاهی کارگرمتخصص پیدا شده است از میان برود .

بهشت ماه ۱۳۲۶

احمد میر شاکب - احمد انواری

حساب

۱- کلیات

- ۱- آنچه که قابل کم و زیاد شدن باشد کمیت است .
- ۲- قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند :
- ۳- واحد یا یک که هر کمیت مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجیدن مقادیر همجنس خود بکار میرود .
- ۴- عدد نتیجه سنجیدن هر مقدار با واحد همجنس خودش میباشد .
- ۵- عدد درست (صحیح) عبارتست از اجتماع چند واحد تمام .
- ۶- سلسله اعداد طبیعی رشته اعدادیست که از يك شروع شود و در آن هر عدد يك واحد از عدد بلافاصله قبل از آن بزرگتر باشد . این سلسله بی انتهاست .
- ۷- پایه یا مبنای شمار معین میکنند که هر واحد مرتبه بالاتر چند برابر واحد مرتبه پائین تر است .
- ۸- پایه شمار معمولی ده میباشد و این شمار را شمار دهدهی (اعشاری) میگویند .
- ۹- در اعداد دهدهی (اعشاری) ده واحد از هر مرتبه واحد مرتبه بلافاصله بالاتر را تشکیل میدهد .
- ۱۰- در هر عدد رقمی که سمت چپ رقم دیگر نوشته شود نمایش مرتبه بلافاصله بالاتر خواهد بود .

II - جمع

۱۱ - در جمع اعداد تغییر محل عوامل جمع تغییری در حاصل جمع نمیدهد.

۱۲ - بجای چند عامل جمع میتوان حاصل جمع آنها را قرار داد، یعنی:

۱۳ - برای امتحان جمع بیکسی از این طریقه ها عمل

باید کرد:

الف - اگر در موقع جمع اعداد را از پائین بالا جمع کرده باشیم برای امتحان آنها را از بالا پائین جمع میکنیم.

ب - اعداد را دسته دسته نموده هر دسته را جداگانه جمع میکنیم و حاصل جمعها را با هم جمع مینمائیم.

III - تفریق

۱۴ - هرگاه یک عدد بعوامل تفریق (مفروق و مفروق منه یا کاسته و کاهشیاب) اضافه یا از آنها کم کنیم در تفاضل تغییری پیدا نمیشود. یعنی:

۵ - برای کاستن مجموع چند عدد از یک عدد (یا مجموع چند عدد) میتوان یکایک آنها را از این عدد (یا

مجموع چند عدد) کاست، یعنی:

۱۶ - امتحان تفریق را میتوان بیکسی از طریقه های

۱۶- زیر انجام داد :

الف - تفاضل را از گاهشیاپ کسر می‌کنیم، گاسته بدست می‌آید .
 ب - تفاضل را با گاسته جمع می‌کنیم، گاهشیاپ بدست می‌آید .

۱۷- ضرب

۱۷- در ضرب دویا چند عدد تغییر محل عاملهای ضرب در حاصل ضرب اثری ندارد ، یعنی : $a \times b \times c = b \times a \times c$
 ۱۸- برای ضرب مجموعه یا تفاضل چند عدد در یک عدد آن عدد را در هر یک از عوامل جمع یا تفریق ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم، یعنی :

$$(a + b + c) \times m = am + bm + cm$$

۱۹- بجای چند عامل میتوان حاصل ضرب آنها را

قرار داد، یعنی : $abcdefg = (fg) \times (da) \times (ec)$

۲۰- برای ضرب یک عدد در حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا در یکی از عوامل ضرب نموده حاصل را در سایر عوامل ضرب کرد ، یعنی :

$$abcdef \times n = abc(dn)ef$$

۲۱- برای ضرب حاصل ضرب چند عدد در حاصل ضرب چند عدد دیگر میتوان تمام عوامل را در هم ضرب نمود، یعنی :

$$abcd \times pq = abcdpq$$

۲۲- در ضرب دو عدد هرگاه یکی از دو عامل ضرب

را چند مرتبه بزرگ یا کوچک کنیم حاصل ضرب نیز همان اندازه بزرگ یا کوچک میشود.

۲۳ - هرگاه یکی از عاملهای ضرب را در عددی ضرب و عامل دیگر را بر همان عدد تقسیم کنیم در حاصل ضرب تغییری حاصل نمیشود.

۲۴ - برای امتحان ضرب جای مضروب (پس شمرده) و مضروب قیه (پس شمار) را باهم عوض میکنیم و عمل ضرب را تکرار میمائیم.

۱- تقسیم

۲۵ - در هر تقسیم اگر حاصل ضرب بهر (خارج قسمت) در بخشیا ب (مقسوم علیه) را با باقیمانده جمع کنیم بخش (مقسوم) بدست میآید. یعنی اگر $1) 100 = 25$ بخشیا ب و $1) 25 = 25$ باقیمانده باشد:

و همچنین $1) 100 = 25$

۲۶ - اگر مقسوم و مقسوم علیه (بخشی و بخشیا ب) را بر عددی تقسیم (یا در عددی ضرب) کنیم خارج قسمت تغییری نمیکند ولی باقیمانده بر آن عدد تقسیم (یا در آن عدد ضرب) میشود.

۲۷ - برای تقسیم یک عدد بر حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا بر یکی از عوامل ضرب تقسیم نموده خارج قسمت را بر عامل دوم و خارج قسمت جدید را بر عامل سوم تقسیم و عمل را ادامه دهیم تا آخرین خارج قسمت

بدست آید .

۲۸ - برای امتحان تقسیم میتوان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل را با باقیمانده جمع کرد ، در صورت صحت مقسوم بدست میآید . یا باقیمانده را از مقسوم کم نمود، در صورت صحت تفاضل بر مقسوم علیه قابل قسمت می باشد .

۷۱- قوای اعداد (توان)

۲۹ - قوه a^m هر عدد عبارتست از حاصل ضرب m

m مرتبه

مرتبه آن عدد

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m$$

a را باید و m را نما گویند.

۳۰ - قوه اول هر عدد مساوی خود آن عدد است

$$a^1 = a$$

یعنی :

۳۱ - هر عدد بقوه صفر مساوی است با یک، یعنی :

$$a^0 = 1$$

۳۲ - حاصل ضرب دو قوه با پایه مشترک مساویست با

همان پایه بقوه مجموع نماها، یعنی

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

۳۳ - حاصل ضرب دو قوه با نماهای مشترک مساویست

با حاصل ضرب پایهها بقوه همان نمای مشترک، یعنی :

$$a^m \times 1^n = (a^n)^m$$

۳۴- توان m ام حاصل ضرب چند عدد مساوی است با حاصل ضرب توانهای m ام آن اعداد. یعنی :

$$m, m, m, \dots, m \text{ (} m \text{ بار)} = (m)^m$$

۳۵- اگر توان m ام عددی را بخواهیم به توان جدیدی برسانیم باید پایه را به توان حاصل ضرب نمایها رساند یعنی :

$$a.m.m = a.(m)$$

۳۶- خارج قسمت دو قوه مختلف یک عدد مساویست با همان پایه که به توان تفاضل دو نما برسد، یعنی :

$$a.m : a.n = a.(m - n)$$

۳۷- باقیمانده تقسیم قوه m ام هر عدد a بر عدد دیگر b مساویست با باقیمانده قوه m ام باقیمانده تقسیم a بر b .
 a بر b .

۷۱۱- مساوی و نا مساوی

۳۸- اگر دو طرف دو یا چند تساوی را با یکدیگر جمع یا از یکدیگر تفریق، در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم کنیم نتیجه یک تساوی خواهد بود :

$$\begin{aligned} a &= b & a &+ c = b + c & a &- c = b - c \\ a &\neq b & a &\neq b + c & a &\neq b - c \\ a &> b & a &+ c > b + c & a &- c > b - c \\ a &< b & a &+ c < b + c & a &- c < b - c \end{aligned}$$

۳۹ - اگر بین دو طرف دو یا چند نامساوی یکجبهت اعمال جمع ، تفریق ، ضرب یا تقسیم بجا آوریم نتیجه مساوی یا نامساوی در همان جهت خواهد بود :

$$\begin{array}{l} a > b \quad c > d \quad \Rightarrow \quad a + c > b + d \\ a < b \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d \end{array}$$

توجه - در صورتیکه اعمال چهارگانه بین چند تساوی و چند نامساوی یکجبهت بعمل آید نتیجه یا نامساوی در همان جهت خواهد بود .

۷۱۱۱ - بخش پذیری یا قابلیت تقسیم

۴۰ - عددی بر عدد دیگر قابل قسمت است که باقیمانده تقسیمش بر آن صفر باشد. عدد اول را مضرب دومی و دومی را مقسوم علیه یا عا د اولی مینامند و میگویند دومی اولی را عا د میکند .

۴۱ - هر عدد که رقم سمت راست آن صفر یا جفت باشد بر ۲ قابل قسمت است .

۴۲ - هر عدد که دو رقم سمت راست آن صفر باشند یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۴ باشد بر ۴ قابل قسمت است .

۴۳ - عددی بر ۸ قابل قسمت است که سه رقم سمت راست آن صفر بوده یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۸ باشد .

۴۴ - عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام یا نامساوی

حساب

صفحه ۸

۳ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم آن عدد هم بر ۳ همان خواهد بود.

۴۵ - عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم سمت راست آن صفر یا ۵ باشد.

۴۶ - عددی بر ۶ قابل قسمت است که بر ۲ و ۳ قابل قسمت باشد.

۴۷ - عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد. اگر تقسیم مجموع ارقام عددی بر ۹ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم عدد هم بر ۹ همانست خواهد بود.

۴۸ - عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و مجموع ارقام مراتب فردش صفر و یا قابل قسمت بر ۱۱ باشد. و الا باقیمانده تقسیم همان تفاضل یا قیادتی ۱۱ بر آن تفاضل خواهد بود.

مثال : ۱) 798842 بر ۱۱ قابل قسمت است.

۲) 4758 بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم و تفاضل ارقام مراتب زوج و فرد ۶ میباشد.

۳) عدد 3547580 بر ۱۱ قابل قسمت نیست و تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و فرد ۳ و باقیمانده تقسیم ۸ یا $(3-11)$ است

۱.۲ - اعداد اول

۴۹ - هر عددی که جز بر خود و یک به عدد دیگری قابل قسمت نباشد عدد اول نامیده میشود.

۵۰ - اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰ عبارتند از :

اعداد اول										صفحه ۹
۱	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹
۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۷	۷۱	۷۳	۷۹
۸۳	۸۷	۸۹	۹۷	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹	۱۱۳	۱۱۷	۱۲۱
۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹	۱۴۳	۱۴۷	۱۵۱	۱۵۳	۱۵۷	۱۶۱	۱۶۷	۱۷۱
۱۷۳	۱۷۷	۱۷۹	۱۸۱	۱۸۷	۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۲۰۱	۲۰۳	۲۰۷
۲۱۱	۲۱۷	۲۲۱	۲۲۳	۲۲۷	۲۳۱	۲۳۳	۲۳۷	۲۴۱	۲۴۷	۲۵۱
۲۵۳	۲۵۷	۲۵۹	۲۶۳	۲۶۷	۲۷۱	۲۷۳	۲۷۷	۲۸۱	۲۸۷	۲۹۱
۲۹۳	۲۹۷	۲۹۹	۳۰۳	۳۰۷	۳۱۱	۳۱۳	۳۱۷	۳۲۱	۳۲۷	۳۳۱
۳۳۳	۳۳۷	۳۳۹	۳۴۳	۳۴۷	۳۵۱	۳۵۳	۳۵۷	۳۶۱	۳۶۷	۳۷۱
۳۷۳	۳۷۷	۳۷۹	۳۸۳	۳۸۷	۳۹۱	۳۹۳	۳۹۷	۴۰۱	۴۰۳	۴۰۷
۴۱۱	۴۱۷	۴۲۱	۴۲۳	۴۲۷	۴۳۱	۴۳۳	۴۳۷	۴۴۱	۴۴۷	۴۵۱
۴۵۳	۴۵۷	۴۵۹	۴۶۳	۴۶۷	۴۷۱	۴۷۳	۴۷۷	۴۸۱	۴۸۷	۴۹۱
۴۹۳	۴۹۷	۴۹۹	۵۰۳	۵۰۷	۵۱۱	۵۱۳	۵۱۷	۵۲۱	۵۲۷	۵۳۱
۵۳۳	۵۳۷	۵۳۹	۵۴۳	۵۴۷	۵۵۱	۵۵۳	۵۵۷	۵۶۱	۵۶۷	۵۷۱
۵۷۳	۵۷۷	۵۷۹	۵۸۳	۵۸۷	۵۹۱	۵۹۳	۵۹۷	۶۰۱	۶۰۳	۶۰۷
۶۱۱	۶۱۷	۶۲۱	۶۲۳	۶۲۷	۶۳۱	۶۳۳	۶۳۷	۶۴۱	۶۴۷	۶۵۱
۶۵۳	۶۵۷	۶۵۹	۶۶۳	۶۶۷	۶۷۱	۶۷۳	۶۷۷	۶۸۱	۶۸۷	۶۹۱
۶۹۳	۶۹۷	۶۹۹	۷۰۳	۷۰۷	۷۱۱	۷۱۳	۷۱۷	۷۲۱	۷۲۷	۷۳۱
۷۳۳	۷۳۷	۷۳۹	۷۴۳	۷۴۷	۷۵۱	۷۵۳	۷۵۷	۷۶۱	۷۶۷	۷۷۱
۷۷۳	۷۷۷	۷۷۹	۷۸۳	۷۸۷	۷۹۱	۷۹۳	۷۹۷	۸۰۱	۸۰۳	۸۰۷
۸۱۱	۸۱۷	۸۲۱	۸۲۳	۸۲۷	۸۳۱	۸۳۳	۸۳۷	۸۴۱	۸۴۷	۸۵۱
۸۵۳	۸۵۷	۸۵۹	۸۶۳	۸۶۷	۸۷۱	۸۷۳	۸۷۷	۸۸۱	۸۸۷	۸۹۱
۸۹۳	۸۹۷	۸۹۹	۹۰۳	۹۰۷	۹۱۱	۹۱۳	۹۱۷	۹۲۱	۹۲۷	۹۳۱
۹۳۳	۹۳۷	۹۳۹	۹۴۳	۹۴۷	۹۵۱	۹۵۳	۹۵۷	۹۶۱	۹۶۷	۹۷۱

جدول اعداد اول معروفست بخریال اراتستن

- ۵۱ - تجزیه يك عدد بعوامل اول تشكيل دهنده آن عدد فقط بياك طريق ممكن است .
- ۵۲ - دو عدد را نسبت بهم اول گویند وقتی عادمشترك نداشته باشند، یعنی عددی نتوان یافت كه هر دو بر آن قابل-قسمت باشند .

- ۵۳- هر دو عدد غیر اول اقلا يك عاد اول خواهند داشت .
- ۵۴- رشته اعداد اول بی پایان است .
- ۵۵- هر عدد اولی که عدد دیگر را عاد نکند نسبت بآن اول است .
- ۵۶- هر عدد غیر اول حاصلضرب چند عدد اول است . بدست آوردن عوامل اول هر عدد غیر اول را تجزیه آن بمعوامل اول گویند .

ج- بزرگترین عاد (یا مقسوم علیه) مشترک

- علامت اختصاری آن بعم میباشد .
- ۵۷- دو یا چند عدد میتوانند عاد های مشترک بسیار داشته باشند ؛ آنرا که از همه بزرگتر باشد بعم آنها میگویند .
- ۵۸- اگر بین دو عدد ، عدد کوچکتر بزرگتر را عاد کند خود آن بعم دو عدد مفروض خواهد بود .
- ۵۹- بعم دو عدد بعم عدد کوچکتر و باقیمانده تقسیم عدد بزرگتر بر کوچکتر نیز میباشد .
- ۶۰- برای تعیین بعم دو عدد بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم میکنیم و عدد کوچکتر را بر باقیمانده تقسیم اول و باقیمانده تقسیم اول را بر باقیمانده تقسیم دوم قسمت میکنیم و عمل را به همین وجه ادامه میدهیم تا وقتی که عمل تقسیم باقیمانده نداشته باشد . آخرین مقسوم علیه بعم دو عدد مفروض است .

۸	۷	۵	
۶	۴۸	۳۴۲	۱۷۵۸
		۶	۴۸

۶۱ - برای تعیین بعم چند عدد نخست بین دوتای آنها بعم معین میکنیم ، سپس بین این بعم و عدد سوم بعم بدست میآوریم ، آنگاه بین بعم جدید و عدد چهارم . . . و به همین نحو عمل را ادامه میدهیم تا همه اعداد منظور شوند . آخرین بعم بعم کلیه اعداد است .

۶۲ - ممکنست بعم چند عدد را از راه تجزیه آنها بعوامل اول بدست آورد . برای اینکار پس از تجزیه آن اعداد عوامل اول مشترك آنها با کوچکترین نما را در هم ضرب میکنیم .

$$\begin{array}{l}
 ۱۷۵۸ = ۲ \times ۳ \times ۲۹۳ \\
 ۳۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \\
 ۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳
 \end{array}$$

۶۳ - اگر دو عدد در عددی ضرب (یا در عددی تقسیم) شوند بعم آنها نیز چنین خواهد شد .

۱ - کوچکترین مضرب مشترك

علامتها اختصاری آن کم

۶۴- دو یا چند عدد مضرب بهای مشترک پیشمار دارند. آنرا که از همه کوچکتر باشد کمم آنها میگویند.

۶۵- کمم چند عدد که نسبت بهم اول باشند حاصل مضرب آنهاست.

۶۶- اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند کمم آنها نیز چنین خواهد شد.

۶۷- کمم بین دو عدد عبارتست از خارج قسمت تقسیم حاصل ضرب آن دو عدد بر بهم آنها.

۶۸- کمم بین چند عدد با این طریق بدست میآید که اول بین دوتای آنها کمم تعیین نموده و بعد بین این کمم و عدد سوم کمم تعیین میکنیم و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا کمم بین تمام آن اعداد بدست آید.

۶۹- کوچکترین مضرب مشترک اعدادی که عوامل اول تجزیه شده اند عبارتست از حاصل ضرب عوامل اول مشترک و غیر مشترک آنها که دارای بزرگترین نما باشند.

۱۱- برخه یا کسر

۷۰- هر گاه یک (واحد) را به ۱۱ قسمت مساوی کنیم و ۱۱ قسمت از آنرا اختیار نمائیم بخرشدهای یا کسری از واحد مساوی ۱۱ آن را اختیار کرده ایم.

۷۱- برخه نام یا مخارج و ۱۱ را برشده شمار یا سووت گویند. هر گاه ۱۱ قودای از ۱۰ باشد برخه را چهلدهی یا

اعشاری و گرنه آنرا متعارفی میگویند .

اگر m از n بزرگتر باشد $\frac{m}{n}$ را برخه نامند .

چنانچه یا برخه عدد صحیحی همراه باشد یا یک عدد برخگی خواهیم داشت ، مانند $\frac{2}{5}$

• m و n ممکنست عدد صحیح یا کسر باشند .

۷۱ - نسبت دو طول - هرگاه برای اندازه گرفتن دو طول l و l' واحد مشترکی بکار رود و l شامل m مرتبه و l' شامل n مرتبه واحد مشترک باشد نسبت دو طول او l' عبارتست از برخه $\frac{m}{n}$.

خواص عمومی

۷۲ - حاصل ضرب طولی مانند l در عدد n عبارتست از حاصل جمع n طول مساوی l .

۷۳ - حاصل ضرب طولی مانند l در $\frac{1}{n}$ یعنی عکس n

عبارتست از طول حاصل از تقسیم l به n قسمت مساوی .

۷۴ - حاصل ضرب طولی مانند l در کسر $\frac{m}{n}$ عبارتست

از $\frac{m}{n}$ طول l ، یعنی برای بدست آوردن این حاصل ضرب باید

l را در m ضرب و حاصل را بر n تقسیم نمود یا l را بر n تقسیم و خارج قسمت را در m ضرب کرد .

۷۵ - هرگاه دو جمله کسری (صورت و مخرج) را در

یا با عدد (یا بریات عدد) ضرب (یا تقسیم) کنیم حاصل کسری است مساوی کسر مفروض .

۷۶ - هرگاه صورت کسری را در عددی ضرب نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود .

۷۷ - هرگاه مخارج کسری را در عددی ضرب نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۸ - هرگاه صورت کسری را بر عددی تقسیم نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۹ - هرگاه مخارج کسری را بر عددی تقسیم نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود .

۸۰ - برای اینکه دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند لازم و کفایت که $a \cdot d = b \cdot c$ باشد .

۸۱ - کسری را میگویند **بسط** ترین صورت در آمده یا **خیر ممکن** اگر $\frac{a}{b}$ شده است که صورت و مخارجش عاد مشترکی نداشته باشند یعنی نسبت بهم اول باشند .

۸۲ - چند کسر را میگویند **مخارج مشترک** دارند که مخارجهای همه یکی باشد .

۸۳ - برای تعدیل چند کسر بکوچکترین مخارج مشترک باید:

- ۱ - هر کسر را بساده ترین صورت در آورد ،
- ۲ - سپس بین مخارجها کم تعیین کرد ،
- ۳ - کم را بر مخارج هر کسر تقسیم و خارج قسمت را در دهن حاصل کسر ضرب نمود .

تیمسره ۵ - هر گاه در قسمت ۲ بجای کم مخرجها يك مضرب مشترك آنها را بدست آوریم کسرها يك مخرج تحويل خواهند شد نه بکوچکترین مخرج مشترك .

جمع و تفریق برخه ها

۸۴ - مجموع یا تفاضل چند کسر که يك برخه نام (مخرج) داشته باشند کسریست که صورتش مجموع یا تفاضل صورتها و مخرجش مخرج مشترك کسرهاى مقروض باشند .

تیمسره ۵ - اگر کسرها يك مخرج نداشته باشند نخست آنها را يك مخرج تحويل میکنیم .

ضرب برخه ها

۸۵ - حاصلضرب دو یا چند کسر کسریست که صورتش حاصلضرب صورتها و مخرجش حاصلضرب مخرجها باشد .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \frac{c}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$$

تقسیم کسرها

۸۶ - برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس نموده بین آنها عمل ضرب بجا میآوریم :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \frac{a}{a} : \frac{b}{b} = \frac{a}{b}$$

۸۷ - هر عدد صحیح را میتوان کسری دانست که مخرجش ۱ باشد . با این فرض قواعد را جمیع اعداد در کسرها را میتوان در اعداد صحیح نیز جاری دانست .

برخه‌های دهدهی

۸۸ - مجموع و تفاضل عددهای دهدهی ممکنست عدد صحیح یا دهدهی باشد .

۸۹ - حاصلضرب دو عدد دهدهی همیشه عددیست دهدهی

۹۰ - خارج تقسیم دو عدد دهدهی ممکنست عددی صحیح یا کسر دهدهی یا کسر متعارفی باشد .

تبدیل کسر دهدهی به متعارفی و بعکس

۹۱ - هر کسر دهدهی را میتوان بصورت کسر متعارفی

$$\text{نوشت : } \frac{۲۳}{۴۰} = \frac{۵۷۵}{۱۰۰۰۰} = ۰.۰۵۷۵$$

۹۲ - هر کسر متعارفی را میتوان بوسیله تقسیم کردن صورت بر مخارج بصورت کسر دهدهی درآورد :

$$\frac{۲۳}{۲۵} = ۰.۹۲$$

کسر متعارفی را مؤلف کسر دهدهی میگویند

۹۳ - اگر مخارج کسر متعارفی فقط مضرب قوای مختلف

۲ و ۵ باشد تقسیم صورت بر مخارج بطور صحیح انجام میگيرد یعنی بالاخره باقیمانده تقسیم صفر میشود . اما اگر مخارج شامل عواملی غیر از ۲ و ۵ باشد باقیمانده تقسیم ، هر قدر هم عمل را ادامه دهیم ، هیچگاه صفر نمیکشود و چون بعد از يك یا چند عمل باقیمانده ای برابر یکی از باقیمانده‌های سابق بدست خواهد آمد يك عده ارقام مرتباً در خارج قسمت تکرار خواهند شد . چنین برخه‌ای را برخه دوری یا کسر متناوب گویند .

مثال ۱ : ۰/۶۶۶ ۲

۲ ۷۱۴۲۸۵ ۰/۷۱۴۲۸۵ ۵

در برخه دوری پیکرهائی را که تکرار میشوند دوره گردش نامند در مثال ۱ دوره گردش ۶ و در مثال ۲ ۷۱۴۲۸۵ است .

۹۴ - برخه دوری را ساده گویند اگر دوره گردش بی فاصله بعد از ممیز شروع شود (مثالهای بالا) و مرکب خوانند اگر بین ممیز و دوره گردش يك دوره غیر گردش یعنی عددی باشد که تکرار نشود .

مثال ۵۷۱۴۲۸ ۰/۳۵۷۱۴۲۸ ۱۴

۹۵ - برای نوشتن بعد از ممیز دوره غیر گردش و بعد دوره گردش را يك بار نوشته پس از آن چند نقطه میگذاریم
۹۶ - برخه متعارفی وقتی برخه دوری ساده قابل تبدیل است که در مخرجش هیچ عامل ۲ و ۵ نباشد و وقتی که در مخرجش عامل ۲ یا ۵ و عوامل دیگر باشند برخه دوری مرکب تبدیل میگردد .

۹۷ - کسر مولد کسراعدادی دوره ساده کسری است که صورتش يك دوره گردش و مخرجش بعد دوره گردش ۹ باشد .

۹۸ - صورت کسر مولد کسراعدادی متناوب مرکب بدین طریق بدست میآید که دوره غیر گردش را نوشته و دنبال آن يك دوره گردش را بنویسیم بعد از این عدد که حاصل میشود عدد حاصل از دوره غیر گردش را کم کنیم این

تفاضل صورت کسر مولد است مخارج کسر مولد کسرا عشری متناوب مرکب بدینطریق بدست میآید که بعداً دوره گردش نوشته و بعداً دوره غیر گردش صفر در جلوی آن بگذاریم

XIII نسبت و تناسب :

۹۹ - نسبت دو عدد a و b عبارتست از خارج قسمت $\frac{a}{b}$

اعداد a و b میتوانند صحیح یا کسری باشند .
۱۰۰ - تساوی دو نسبت را يك تناسب گویند مانند

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

تناسب مذکور را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$a \cdot d = c \cdot b$$

۱ -

$$\frac{d}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{و} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{c} \quad \text{و} \quad \frac{c}{b} = \frac{d}{a}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

۳ -

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

۴ -

$$\frac{a}{a-b} = \frac{b}{b-c} = \frac{c}{c-d}$$

۱۰۱ - از چند نسبت مساوی

روابط زیر نیز نتیجه میشود :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{\pm a' \pm b' \pm c' \pm d'}$$

۱۰۲ - اگر چند نسبت نامساوی $\frac{a}{a'}$ و $\frac{c}{c'}$ و $\frac{d}{d'}$ و $\frac{b}{b'}$ در دست

باشند نسبت $\frac{a \pm b \pm c \pm d}{a' \pm b' \pm c' \pm d'}$ محصور است بین بزرگترین و کوچکترین کسور مفروض.

۱۰۳ - اگر بصورت و منخرج کسر کوچکتر از واحد

$\frac{a}{b}$ يك عدد c بیفزائیم کسر بزرگتر میشود ولی باز از ۱

کوچکتر است یعنی هرگاه $\frac{a}{b} < 1$ باشد $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

۱۰۴ - ولی هرگاه $\frac{a}{b} > 1$

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

۱۰۵ - واسطه عددی A بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$A = \frac{a+b}{2}$$

همچنین واسطه عددی A بین n عدد a و b و c و ... و ۱

عبارتست از: $A = \frac{a+b+c+\dots+1}{n}$

۱۰۶- واسطه‌هندسی (i) بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$(i) = \sqrt{a \cdot b}$$

همچنین واسطه‌هندسی (i) بین n عدد a_1, a_2, \dots, a_n و عبارتست از:

$$(i) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

۱۰۷- واسطه عددی (A) بین n عدد a و b و c و ...

و 1 از واسطه هندسی (i) آنها بزرگتر است.

XIV - مقیاسها

۱- دستگاه متری

۱۰۸- در این دستگاه یک‌واحد طول می‌باشد

و سایر یکدهها از آن مشتق میشوند.

۱۰۹: طول

واحد: متر تقریباً $\frac{1}{10}$ نصف اینها در مین

متر نمونه بین المللی

اضحای: دکامتر $\frac{1}{10}$ متر، هکتومتر $\frac{1}{100}$ متر

کیلومتر $\frac{1}{1000}$ متر

اجزاء: دسی‌متر $\frac{1}{10}$ متر، سانتیمتر $\frac{1}{100}$ متر

میلی‌متر $\frac{1}{1000}$ متر

۱۱۰: سطح

واحد: متر مربع

اضحای: دکامتر مربع $\frac{1}{10}$ متر مربع، هکتومتر مربع $\frac{1}{100}$ متر مربع

کیلومتر مربع $\frac{1}{1000}$ متر مربع

اجزاء : دسیمتر مربع $\approx ۰/۰۱$ ، سانتیمتر مربع $\approx ۰/۰۰۰۱$ ، کیلومتر مربع $\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۱$ متر مربع
 واحد اراضی زراعتی : آر \approx دکامتر مربع
 اضلاع : هکتار ≈ ۱۰۰ آر \approx هکتو متر مربع
 اجزاء : سانتی آر $\approx ۰/۰۱$ آر \approx متر مربع
 تبصره : در مقیاس سطح اضلاع و اجزاء صد صد
 بزرگ و کوچک میشوند .

۹۹۹ = حجم

واحد : متر مکعب
 اضلاع : متداول نیستند
 اجزاء : دسیمتر مکعب $\approx ۰/۰۰۱$ ، سانتیمتر مکعب $\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۱$ ، میلیمتر مکعب $\approx ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱$ متر مکعب
 تبصره : در مقیاس حجم اضلاع و اجزاء هزار به هزار
 بزرگ و کوچک میشوند .

۹۹۹ = پودها ده

واحد : لیتر \approx یک دسیمتر مکعب
 اضلاع : دکالیترا ≈ ۱۰ ، هکتولیترا ≈ ۱۰۰ ، کیلو لیتر ≈ ۱۰۰۰ لیتر
 اجزاء : دسیلیتر $\approx ۰/۱$ ، سانتیلیتر $\approx ۰/۰۱$ ، میلیلیتر $\approx ۰/۰۰۰۱$ لیتر

۹۹۹ = وزن

واحد : گرم \approx وزن یک سانتیمتر مکعب آب مقطع درجه حرارت

اضعاف : دكا گرم ۱۰۰ ، هكتو گرم ۱۰۰۰ ، كيلو گرم ۱۰۰۰۰
 كنثال ۱۰۰۰ كيلو گرم ، تن ۱۰۰۰۰ كيلو گرم
 اچواء : دسي گرم : ۰/۱ سانتيمتر ۰/۱۰ ميلي
 براي جواهرات : قيراط ۲۰ سانتيمتر

معدنگي وزن و حجم

۱ گرم معادلست با وزن يك سانتيمتر مكعب آب مقطر درجه
 ۱ كيلو گرم » » يك دسيمتر »
 ۱ تن » » يك متر »
 گرم و سانتيمتر مكعب ، كيلو گرم و دسيمتر مكعب ،
 تن و متر مكعب را يكة‌های متناظر كويند

۱۱۵ - وزن مخصوص يك جسم عبارتست از وزن
 يكة حجم در صورتيكه وزن با يكة متناظر آن بيان شود .
 وزن مخصوص بر خي اجسام مهم :

۱	چوب پنبه	۰/۲۴	۸	آلومينيم	۲/۶
۲	چوب	۰/۶۹ - ۰/۷۳	۹	آنتيموان	۶/۸
۳	بنزين	۰/۶۹ - ۰/۷۱	۱۰	روي	۷/۲
۴	نقطه	۰/۷۶	۱۱	چدن	۷/۱ - ۷/۳
۵	الكحل	۰/۸۱	۱۲	قلم	۷/۲
۶	يخ	۰/۸۸ - ۰/۹۲	۱۳	آهن	۷/۸۵
۷	آب	۱/۰	۱۴	فولاد نرم	۷/۸۶

صفحه ۲۳

۸/۷-۸/۴
۸/۸۵
۸/۹
۱۰/۵
۱۱/۲
۱۳/۶
۱۹/۳۲
۲۱/۲

مفرغ
نیکل
مس
نقره
سرب
جیوه
طلا
پلاتین

۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۴۰
۴۱
۴۲

مقیاسها

۱۵ مازوت
۱۶ اسفالت
۱۷ ذغال سنک
۱۸ کک
۱۹ آجر
۲۰ خاک رس
۲۱ بتن
۲۲ سیمان
۲۳ شیشه
۲۴ سنک

۱/۱-۰/۹
۱/۵-۱/۱
۱/۵-۱/۲
۱/۴
۱/۶-۱/۴
۲/۱-۱/۶
۱/۴۵-۱/۸
۱/۹
۲/۶-۲/۴
۳/۰۸-۲/۵

۱۱۶ = ۱۱۶

شماره ترتیب	مشخصات	عبار	وزن متر	خالص
۱	طلا		۸	۷۰۴۴۴۴۸۴
۲	پلاتین		۴۰۰۶۶۵۵	۴۰۰۶۶۵۵
۳	نقره		۱۰۶۰	۱۰۶۰
۴	سرب		۸۰	۸۰
۵	جیوه		۴۰۴۰	۴۰۴۰
۶	طلا		۱۰۶۰	۱۰۶۰
۷	پلاتین		۴۰۴۰	۴۰۴۰
۸	نقره		۴۰۶۸	۴۰۶۸
۹	سرب		۱۰۶۰	۱۰۶۰
۱۰	جیوه		۴۰۴۰	۴۰۴۰

۱۱۷۲ مقیاسهای سابق

طول : واحد : ذرع

اضعاف : فرسناك = ۶۰۰۰ ذرع

اجزاء : چارك = $\frac{1}{4}$ ذرع ، كره = $\frac{1}{16}$ ذرع ، بهير $\frac{1}{64}$ ذرع

وزن : واحد : من

اضعاف : ری = ۴ من ، خروار = ۱۰۰ من

اجزاء : چارك = $\frac{1}{4}$ من ، سیر = $\frac{1}{2}$ منمثقال = $\frac{1}{24}$ سیر : نخود = $\frac{1}{2}$ مثقال : گندم = $\frac{1}{4}$ نخود

۹۹۸ - و لا یطه یون مقیاسهای فعلی و قدیم

ذرع = ۱/۰۴ متر

گندم	نخود	مثقال	سیر	من	خروار
گرم ۰/۴۸	۵		۱		
۷۵ گرم			۱۰		
۷۵۰ گرم			۱۶		
يك كيلو گرم	۸	۵			
»				۱	
سیریکه				۱۶	
يك تن	۸	۵	۱۶	۱۶۰	۱۰

صفحه ۲۵ مقیاسهای سابق

گندم = ۰/۰۴۸۸۲۸۱ گرم سیر = ۷۵ گرم
نخود = ۰/۱۹۵۳۱۲۵ « من = ۳ کیلوگرم
مشقال = ۴/۶۸۷۵ « خروار = ۳۰۰ »

۹۹۹ - زمان

واحد : روز = مدت حرکت وضعی زمین
اجزاء : ساعت = $\frac{1}{24}$ روز دقیقه = $\frac{1}{60}$ ساعت ثانیه = $\frac{1}{60}$ دقیقه

اضعیاف : هفته = ۷ روز ماه = ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز
سال شمسی = ۳۶۵ روز یا ۳۶۶ روز (در سال کبیسه)
سال قمری = ۳۵۴ یا ۳۵۵ روز () «
قرن = صد سال

سال شمسی ایرانی : شروع : اول فروردین مصادف با عبور کره زمین از نقطه اعتدال ربیعی و روز اول بهار
سال شمسی ایرانی : ۱۲ ماه دارد از فروردین تا شهریور ۳۱ روز ، از مهر تا بهمن ۳۰ روز اسفند در سال عادی ۲۹ و در سال کبیسه ۳۰ روز
سال قمری عربی : ۱۲ ماه دارد که متناوباً ۳۰ و ۲۹ روز دارند : (محرم ، صفر ، ...)

سال شمسی میلادی : شروع اول ژانویه مساوی ۱۱ دی ماهها ژانویه (۳۱) فوریه (۳۰ یا ۲۹) مارس (۳۱) آوریل (۳۰) مه (۳۱) ژون (۳۰) ژوئیه (۳۱) اوت (۳۱) سپتامبر (۳۰) اکتبر (۳۱) نوامبر (۳۰) دسامبر (۳۱)

تعیین : در تقویم فرنگی سالهایی که عددشان به ۴ خاتمه یابد یا عدد کبیسه اند جز آنها که با دو صفر ختم میشوند

۵. در اینصورت اگر عدد سال صرف نظر از صفرها به
 ۴ قابل قسمت باشد سال کیسه است و الا ساده .
 در تقویم ایرانی در هر دوره ۳۳ ساله سالهای ۴ و ۸
 و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۲ کیسه است و سایر
 سالها ساده

مطابق تاریخها :

اول فروردین ۱۳۲۶ شمسی هجری در سال ۱۹۴۷ میلادی
 و ۱۳۶۶ هجری قمری واقع میشود .

۲۷ - اعداد مرکب

۱۲۰ - تهریف : متباینانی را که با اجزاء و اضعاف
 بستگی دهندهی ندارند اعداد مرکب گویند . مانند ساعت و
 دقیقه و ثانیه یا درجه دقیقه ثانیه یا اندازه های سایر ایران ،
 ۱۲۱ - در اعمال حسابی مربوط با اعداد مرکب همیشه
 تبدیل یکهاها بیکه های بالا تر یا پائین تر لازم می آید و این
 کار بوسیله ضرب و تقسیم صورت میگیرد .

۱۲۲ - افزایشی - در جمع اعداد مرکب یا پستی
 یکهای هم نوع را زیرهم نوشت و جمع کرد و بجز داینکه
 مجموع مساوی یا بزرگتر از یک باشد آن را از جنس
 آن یک کرد .

۱۲۳ - کاهششی - اگر اعداد نماینده یکی های مختلف
 در گاهشیاب بزرگتر از اعداد خلیه خود در گاهشته باشند عمل
 بکسر و است انجام پذیر است .

هرگاه یکی از اعداد نماینده یکک، های مختلف در گاهشیاب کوچکتر از عدد نظیر خود در گاهشته باشد باید در گاهشیاب يك يکک مرتبه بعد را از جنس يکک مرتبه پائین کرد و آن افزود آنگاه عمل گاهش را بجا آورد .

۱۲۴ ضرب - برای ضرب اعداد مرکب در يك عدد آن عدد را در هر يك از اعداد نماینده يککهای مختلف ضرب نموده در حاصل ضرب يککها را در صورت احتیاج يکک بالانتر تبدیل میکنیم .

۱۲۵ تقسیم - برای تقسیم اعداد مرکب بر يك عدد ابتدا از عدد نماینده بزرگترین يکک شروع کرده عمل تقسیم را بجا می آوریم . بزر را نوشته باقیمانده را از جنس يکک مرتبه پائین کرده بر عدد نماینده همان يکک در بخش افزوده در مجموع عمل تقسیم را انجام میدهیم ، باقیمانده جدید را از جنس يکک مرتبه کوچکتر ~~ص~~ کرده و عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا تقسیم به پایان رسد .

۱۲۶ اریفه متناسبه

۱۲۶ اریفه - مراد از اریفه متناسبه یا بطور مختصر تناسب قواعدی است که بمدد آن مسائلی حل میشود که در آنها کمیتی نسبت مستقیم یا معکوس با چند کمیت دیگر داشته باشد و از آن کمیت يك مقدار معلوم در دست بوده و بمدد نسبت های معروض باید يك مقدار مجهول آنرا بدست آورد .

۱۲۷ - هرگاه تعداد عوامل معلوم و مجهول از ۲

تجاوز نکند تناسب مفرد و اگر عدد آنها بیش از ۴ باشد تناسب را مرکب گویند .

۱۲۸ - هر گاه در تناسب ، نسبت بین کمیات مستقیم باشد تناسب را مستقیم و الا معکوس گویند .

۱۲۹ قاعده - برای حل تناسب مفرد مستقیم مقدار همچنین کمیت مجهول را در نسبت معکوس دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم

۱۳۰ - قاعده - برای حل تناسب مفرد معکوس مقدار هم جنس کمیت مجهول را در نسبت مستقیم دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم .

۱۳۱ قاعده - برای حل مسائل تناسب مرکب کمیتی را که يك مقدار آن مجهول است پی در پی با هر دو مقدار همچنین

از کمیات دیگر می سنجیم و بهر دو نسبت مستقیم یا نسبت معکوس دو بدو آن مقادیر را تشکیل داده مقدار همچنین مجهول را در

حاصل ضرب کلیه نسبتها ضرب می کنیم تا مقدار مطلوب بدست آید

۸۷۱۱ - آمیزه و آلیاژ

۱۳۲ - هر گاه چند نوع اق کالائی را که بهای آن مختلف باشد با هم بیا آمیزیم کالای آمیخته دارای بهای خاصی است

که «بهای متوسط» یا «میانگین» نامیده میشود . مقداری را که از هر نوع کالای مفروض برداشته ایم نسبت آمیزشی گویند

مسائل آمیزه بر دو نوعند : ۱ - نسبت آمیزش معلوم است ، باید بهای متوسط را یافت . ۲ - بهای متوسط معلوم است ، باید نسبت آمیزش را بدست آورد .

۱۳۳ - در مسائل نوع اول برای بدست آوردن نرخ متوسط قیمت کلیه مقدار را که از هر جنس برداشته میشود حساب نموده حاصل جمع قیمت‌ها را بر مجموع مقدار کالا تقسیم مینمائیم ۱۳۴ - وقتی نرخ اجناس و نرخ متوسط در دست باشد برای بدست آوردن نسبتی که از هر جنس باید برداشت یا بنظر یف عمل میکنیم : میزان سود یا زیان حاصل از هر نوع جنس را تعیین نموده سودها را با هم و زیانها را با هم جمع می‌کنیم بعد به نسبت مجموع زیانها از اجناس سود بخش و به نسبت مجموع سودها از جنس‌های زیان بخش برداشته با هم مخلوط میکنیم .

۱۳۵ آلیاژ - جسمی است که از ذوب چند فلز یا یکدیگر بدست آید . هرگاه از یک فلز گرانبها مانند قریه نقره یا فلز دیگری چون مس آلیاژی ترکیب کنیم مقدار فلز قیمتی را که در هر هزار جزء آلیاژ وجود دارد عیار آن نامند ۱۳۶ - برای بدست آوردن وزن فلز قیمتی در یک آلیاژ کافی است وزن آلیاژ را در عیار آن ضرب کرد . ۱۳۷ - مسائل آلیاژ مانند مسائل آمیزه حل میشوند .

XVIN مرابحه مفرد (بهره کاری)

۱۳۸ - معمولاً هر کس پولی بوام بگیرد برای آفت گرایه‌ای قائل میشود که بهره یا ربح نام دارد . ۱۳۹ - بهره نسبت مستقیم با سرمایه ، یا مدتی که سرمایه در مرابحه بوده است و با نرخ دارد . نرخ یعنی میزان

اچاره واحدیکه در زمان معینی برای سرمایه معینی قابل میثوند
 نرخ فرنگی یا در صد یعنی سود ۱۰۰ ریال در یکسال
 نرخ ایرانی یعنی سود ۱۰ ریال در یک ماه
 ۱۴۰ - برای تبدیل نرخ ایرانی به نرخ در صد کافیست
 آنرا بر حسب شاهی (۵ دینار) بیان نمود و در ۶ ضرب کرد
 مثال : نرخ تومانی (ده ریال) چهار شاهی در ماه برای
 است یا 6×4 یعنی 24% در سال .

۱۴۱ - اگر سرمایه را سی ، مدت را هم ، نرخ را
 و بهره را ب بنامیم و مدت را بر حسب سال بیان کنیم :

$$\begin{array}{r} \text{ن} \times \text{م} \times \text{س} \\ \hline ۱۰۰ \quad \quad \quad \text{ب} \\ \text{ن} \times \text{م} \quad \quad \quad \text{س} \\ \hline ۱۰۰ \times \text{ب} \times \text{س} \\ \hline \text{ن} \times \text{م} \end{array}$$

توجه - در مسائل بهره کاری یک سال ۳۶۰ و ماه
 ۳۰ روز حساب میشود .

۱۴۲ - در مرابحه مفرد سرمایه ثابت است یعنی سود
 سالیانه آن بآن افزوده نمی شود .
 در نوع دیگری از مرابحه در آخر سال سود سالیانه را
 به سرمایه اضافه میکنند . آنرا مرابحه یا (بهره کاری) مرکب
 گویند (رجوع شود به قسمت چهار)

۱۴۳ - قرض بیل

۱۴۳ - در بازار کثانی اغلب بجاای پول نقد یا شطاح سند
 داده میشود که در قرض معینی قابل پرداخت است و اگر دارنده

آن سند بخواهد زود تر از آن تاریخ که بر رسید موسومست سند را بیول تبدیل کند باید مبلغی بنام تثزیر کسر کند و بقیه را دریافت دارد. مبلغی را که در سند بازرگانی نوشته شده ارزش اسمی و مبلغی که بعد از کسر تثزیر پرداخته میشود ارزش فعلی آن است.

۱۴۴ - تثزیر با ارزش اسمی و مدت و نرخ تثزیر نسبت مستقیم دارد و مساوی آن عینا مانند مراجه حل میشود.

۱۴۵ - اگر تثزیر از ارزش اسمی سند کسر شود تثزیر غیر واقعی و اگر ارزش فعلی کسر شود تثزیر واقعی نامیده میشود.

۱۴۶ - تثزیر درونی عادلانه تر است ولی متداول نیست

$$\frac{100 \times \text{س}}{100 + \text{س}} = \text{تثزیر درونی}$$

XX جذر

۱۴۷ - تعریف جذر جذر یا ریشه دوم هر عدد A عددیست که $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

۱۴۸ - برای استخراج جذر اعدادی بین ۱ و ۱۰۰ در جدول داشتن جذر اعداد یک پیکری که عبارتند از:

جذر ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

مجموعه ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

لازم است جذر اعدادی که بین دو عدد پیایی از سطح دوم قرار دارند بین دو عدد نظایر شان از سطح اول میباشند و جذر

تقریبی آنها تا يك يكه تقریب باسانی بدست میاید .
 ۱۴۹ - برای استخراج جذر اعداد از ۱۰۰ ییلا تا يك
 یكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات دو رقمی تقسیم میکنیم
 جذر قطعه اول سمت چپ را تعیین میکنیم و میگردانیم آنرا از
 همان قطعه اول سمت چپ کم میکنیم و قطعه دوم را در سمت
 راست این باقیمانده یابین میآوریم و يك رقم از سمت راست
 عدد حاصل چندا نموده جزء سمت چپ را بر دو برآوریم و رقم
 جذر اولین قطعه سمت چپ تقسیم میکنیم خارج قسمت دومین
 رقم جذر عدد مقروض یا بزرگتر از آنست - پس آنکه امتحان
 آنرا در سمت راست دو برآور اولین رقم جذر نوشته حاصل
 را در خود آن عدد ضرب میکنیم و از عددی ۴۵ از اولین
 باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده است کم میکنیم ؛ اگر
 تقریب ممکن شد رقم امتحان شده رقم دوم جذر است و آن
 را در سمت راست رقم اول جذر مینویسیم والا يك واحد از
 آن کاسته مجدداً امتحان میکنیم تا وقتی که تقریب ممکن
 شود آنوقت قطعه دیگر را در سمت راست باقیمانده فرود آورده
 بطریق بالا عمل میکنیم تا بهمین طریق تمام قطعات بکار وند مثال :

۱۹۷۳۳۸	۳۴۲	۶۸۲
۹	۶۴	۶۴
۸۷۳	۴	۲
۸۵۶	۲۵۶	۱۳۶۴
۱۷۳۸		
۱۳۶۴		
۳۷۴		

عدد ۳۴۲ جذر و ۳۷۴ باقیمانده است

۱۵۰ - برای استخراج چندر اعداد دهدهی تا يك يکته تقریب از جزء دهدهی صرف نظر نموده چندر قسمت درست را تا يك يکته تقریب استخراج می‌کنیم و جزء دهدهی را به باقیمانده چندر می‌افزائیم .
مثال :

$$\begin{array}{r|l}
 28 & 77,950724 \\
 \times 48 & \\
 \hline
 8 & \\
 \hline
 384 & 11724
 \end{array}$$

عدد ۲۸ چندر و ۷۷۲۴ و ۱۱ باقیمانده است .
۱۵۱ - برای استخراج چندر يك عدد درست یا دهدهی تا ۱ ر ۰ یا ۱ ر ۰ یا ... تقریب عدد را از ممیز بعطف راست و چپ بقطعات دو رقمی تقسیم نموده و قطعات سمت راست (بعد از ممیز) را با گذاردن يك یا چند صفر کامل می‌کنیم بطوریکه به تعداد رقم‌های دهدهی که می‌خواهیم در چندر داشته باشیم بعد از ممیز قطعه دورقمی باشد؛ مثلاً اگر منظور محاسبه چندر تا ۱ ر ۰ / ۰ باشد تقریب است باید بعد از ممیز ۶ رقم داشته باشیم . بعد چندر را بقاعده بالا تعیین نموده وقتی در عدد ممیز رسیدیم در چندر نیز ممیز می‌زنیم و عمل را مانند وقتی که ممیز نباشد ادامه می‌دهیم .

مثال - چندر ۹۵ ر ۰ تا ۱ ر ۰ تقریب :

۴۹۰۵۰۰۰۰۰	۲۲۲۲۴	۴۴۴۴۴
۴۹۵	۴۲	۴۴۲
۸۴	۲	۴
۱۱۰۰	۸۴	۱۷۷۷۶
۸۸۴		
۲۱۶۰۰		
۱۷۷۷۶		
۳۸۲۴		

عدد $۲۲/۲۴$ جذر و $۳۸۲۴/۰$ باقیمانده است.

۱۵۲ - اشیای جذر:

جذری را که استخراج شده است معذور نموده با باقیه ها

جمع میکنیم، در صورت صحت باید خود عدد بدست آید.

XII - گعب

۱۵۳ - گعب یا ریشه سوم عدد a عدد n است بقسسی که

$$a^3 = (n-1)(n-2) \dots 1$$

۱۵۴ - برای استخراج گعب اعداد واقع بین ۱ و

۱۰۰۰ در نظر داشتن گعب اعداد یک پیگیری که عبارتند از

گعب ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

گعب ۱ ۲۷۸ ۲۴۶۵ ۲۱۶ ۳۴۳ ۵۱۲ ۷۲۹ ۱۰۰۰

لازم است و گعب اعدادی که بین دو عدد پیانی از سهولت

دوم قرار دارند بین دو عدد و اشیای اول میباشند

و گعب آنها با یک پیانی بدست میآید.

۱۵۵ - برای استخراج کعب اعداد از ۱۰۰۰ بیالا تا يك يكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، کعب قطعه اول سمت چپ را تعیین میکنیم و قطعه دوم را در سمت راست باقیمانده پائین میآوریم، دو رقم از سمت راستش کنار میگذاریم و جزء سمت چپ را بر سه برابر مجذور رقم اول کعب تقسیم میکنیم، رقم خارج قسمت رقم دوم کعب یا قدری بزرگتر است؛ برای امتحان :

اولا، سه برابر مربع اولین رقم کعب را در ۱۰۰ ضرب

کرده مینویسیم،

ثانیا، سه برابر اولین رقم کعب را در عدد امتحان کردنی و در ۱۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثالثا، عدد امتحان کردنی را مربع کرده مینویسیم و این عدد ها را جمع نموده حاصل جمع را در عدد امتحان کردنی ضرب میکنیم، اگر حاصل از عددی که از اولین باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده قابل تقریب باشد عدد امتحان کردنی همان رقم دوم کعب است والا باید يك واحد از آن ~~ککم~~ و امتحان را تکرار کرد و آنقدر امتحان را تکرار نمود تا تقریبی ممکن شود؛ بعد این رقم را در سمت راست کعب قطعه دوم نوشته قطعه سوم را پائین میآوریم و به همین طریق عمل را تکرار میکنیم تا تمام قطعات بکار روند.

مثال :

نشود عدد را اصم یا گزشت گویند. اعداد غیر اصم را منطقی یا گویا نامند.

۱۵۹ - بجای اعداد اصم در محاسبات عددی معمولاً مقدار تقریبی آنها را بکار میبرند.

۱۶۰ - در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد اصم مقادیر تقریبی آنها را بکار میبریم؛ بدیهی است که نتیجه تقریبی بدست خواهد آمد.

۱۶۱ - ضرب و تقسیم ریشه دوم (چند) :

۱ - حاصل ضرب دو عامل اصم \sqrt{a} و \sqrt{b} عبارتست از

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ممکن است حاصل ضرب ریشه‌های دوم دو مقدار اصم

مقدار منطقی باشد؛ مثلاً : $\sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$

۲ - حاصل ضرب عدد a در عامل اصم \sqrt{b} عبارتست از

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

۳ - خارج قسمت دو عامل اصم \sqrt{a} و \sqrt{b} عبارتست از

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ممکن است خارج قسمت ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار

منطقی باشد؛ مثلاً :

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

۴ - معمولاً در محاسبات اگر مخارج کسری بیشتر از عدد اصلی باشد با ضرب صورت و مخارج کسر در مخارج کسر مخارج را منطبق نمایند؛ مثلاً :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{a-b} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

پایان

۱- تعاريف

- ۱- جبر علمي است که برای تعميم دستورها و تسهيل حل مسائل بنکار ميروند .
- ۲- حروفها - درجبر مقادير معلوم را معمولاً با حروف اول الفباء لاتين (a و b و c و) و مقادير مجهول را با حروف آخر (x و y و z و غيره) نمايش ميدهند .
- ۳- نشانه ها - نشانه ها يا علامت برای نشان دادن اعمال يا رابطه ها می که بايد بين اعداد و حروف برقرار باشد بنکار ميروند .
- علامت $+$ - نشانه جمع ، علامت $-$ - نشانه تفریق ، علامت \times يا \cdot - نشانه ضرب و علامت $:$ يا \div - نشانه تقسيم دو عدد ميباشند .
- علامت $=$ - نشانه مساوي بودن و علامت \neq - نشانه اختلاف و علامت $>$ - نشانه بزرگتر يا $<$ - کوچکتر بودن است بطوري که در داخل زاويه عدد بزرگتر و بيرون زاويه عدد کوچکتر نوشته ميشود مثلاً $5 > 3$ نشان ميدهد که 5 کوچکتر است از 3 . و $3 < 5$ نشان ميدهد که 3 بزرگتر يا اقلاً مساوي 5 ميباشد . وقتي مقادير با علامت $+$ يا $-$ يا \times يا $:$ در داخل پراکنده () ، يا گروه [] يا $\{$ کولاد { } قرار داشته

باشند حکم مقدار واحد را پیدا میکنند .

علامت $\sqrt{\quad}$ علامت استخراج ریشه n ام مقدار واقع در زیر $\sqrt{\quad}$ است .

۴ - یادآوری - باید متذکر بود که در موقع حساب کردن هر عبارتی که در آن اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید اول اعمال ضرب و تقسیم و بعد اعمال جمع و تفریق را انجام داد .

۵ - عدد چبری - پولی که وارد صندوق یا تاجرخانه میشود یا از آن خارج میگردد هر دو پولند و لسی در معنی اختلاف دارند اولی به پول موجود در صندوق اضافه شده و دومی از آن کسر گردیده است ؛ میگویند جهت پول اول با دوم فرق دارد و برای تمیز دادن آنها از یکدیگر اولی را با علامت $+$ (مثبت) و دومی را با علامت $-$ (منفی) نشانه میکنند و این عدد حسابی را که با یکی از دو علامت $+$ یا $-$ ممتاز شده است عدد چبری نامند . عدد چبری ۵ - تلفظ میشود منهای ۵ و ۷ - تلفظ میشود باضافه ۷ .

۶ - عدد های حسابی را قدر مطلق عددهای چبری گویند مثلاً در مثال بالا عدد حسابی ۵ قدر مطلق عدد چبری ۵ - میباشد .

۷ - دو عدد چبری مساویند وقتی که دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند .

۸ - دو عدد چبری قرینه اند وقتی که دارای یک قدر مطلق ولی نشانه های مختلف باشند .

- ٩- یادآوری - بعضی مواقع در عمل نشانه $-$ را از جلوی اعداد جبری بر داشته و آنها را بدون نشانه مینویسند؛ ولی هیچوقت اعداد منفی را بدون نشانه $-$ مینویسند.
- ١٠- عبارت جبری - مجموعه‌ای از حروف و اعداد و علاماتی را که در یک رشته محاسبات بنکار میروند عبارت جبری می نامند.
- ١١- عبارت جبری منطبق (گویا) است وقتی که در آن حرفی زیر رادیکال نباشد و در غیر اینصورت، اصم است.
- ١٢- عبارت جبری صحیح است وقتی که شامل حرفی در مخرج نباشد و در غیر اینصورت کسری است.
- ١٣- دو عبارت جبری را متعادل گویند وقتی مقدار عددی آنها با ازاء تمام مقادیری که بجای حروف بگذاریم مساوی باشند.
- ١٤- تساوی بین دو عبارت عددی و یا دو عبارت جبری متعادل را اتحاد گویند و بین آنها این علامت \equiv (تلفظ میشود متحد است یا) را میگذارند.
- ١٥- اگر تساوی بین دو عبارت جبری فقط با ازاء مقادیر مخصوصی از حروف برقرار شود آن تساوی را معادل گویند.
- ١٦- یکجمله - اگر عبارتی جبری از حاصل ضرب اعداد جبری با حروف بدست آمده باشد آن را یکجمله یا منم گویند.
- ١٧- ضریب - عامل عددی هر یکجمله را ضریب آن گویند.
- ١٨- یکجمله‌های متشابه اختلافشان فقط در ضرایبشان میباشد.

۱۹- چند جملهه - مجموع چند یکجملهه Δ یک چند جملهه یا Δ یک نم را تشکیل میدهند.

II- جمع اعداد جبری

۲۰- برای جمع دو عدد متعدهالعلامه قدر مطلق آنها را جمع نموده علامت مشترک را میگذاریم.

۲۱- برای جمع دو عدد مختلفالعلامه قدر مطلق آنها را از هم کم نموده علامت عدد بزرگتر را که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است میگذاریم.

III- تفریق اعداد جبری

۲۲- برای کم کردن عدد Δ از Δ قرینه Δ را بلا جمع می کنیم.

IV- ضرب اعداد جبری

۲۳- حاصلضرب دو عدد متعدهالعلامه مثبت و حاصلضرب دو عدد مختلفالعلامه منفی است.

۲۴- برای ضرب چند عدد جبری قدر مطلق آنها را ضرب نموده اگر تعداد اعداد منفی زوج باشد حاصلضرب مثبت و اگر فرد باشد - میگذاریم.

V- تقسیم اعداد جبری

۲۵- برای تقسیم دو عدد جبری قدر مطلق آنها را تقسیم نموده اگر هر دو متعدهالعلامه باشند جلدوی خارج قسمت

۱- و اگر مختلف علامه باشند — قرار میدهیم.

۷۱- قوه (توان)

۲۶- برای تعریف قوه m ام رجوع شود بشماره ۲۹ بخش حساب .

۲۷- قوه m ام هر عدد مثبت همواره مثبت است .

۲۸- قوه m ام عدد منفی مثبت است اگر m زوج باشد و منفی است اگر m فرد باشد.

۲۹- ضرب چند قوه مسا — اگر پایه ها مشترك باشند یکی از پایه ها را نوشته و نماها را با هم جمع میکنیم :

$$a^{m+1} + a^m + \dots + a^1 + a^0 = a^{m+1} \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^1 \cdot a^0$$

ب- اگر نماها مساوی باشند پایه ها را در هم ضرب نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم :

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$$

۳۰- تقسیم شو قوه — اگر پایه ها مساوی باشند یکی از پایه ها را نوشته نماها را از هم کم میکنیم :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ب- اگر نماها مساوی باشند پایه ها را تقسیم نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۳۱- یادآوری- هر عدد بقره صفر مساوی است با یک.

۳۲- قوه کسری -- اگر داشته باشیم $\frac{p}{a}$ آنرا

میتوان باینصورت نوشت :

$$\frac{p}{a} = \frac{p}{\sqrt{a^2}}$$

۱- حاصل ضرب دو قوه کسری يك عدد :

$$\frac{p}{a} \times \frac{p'}{a'} = \frac{pp'}{aa'}$$

ب خارج قسمت دو قوه کسری يك عدد :

$$\frac{p}{a} \div \frac{p'}{a'} = \frac{pa'}{aa'}$$

ج- قوه کسری حاصل ضرب چند عدد :

$$\left(\frac{p}{a} \right) \left(\frac{p'}{a'} \right) \left(\frac{p''}{a''} \right) = \frac{pp'p''}{aa'a''}$$

د- بقوه کسری رساندن قوی کسری يك عدد :

$$\left(\frac{p}{a} \right) \frac{p'}{q} = \frac{pp'}{aq}$$

۳۴- قوه منفی :

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۱- حاصل ضرب دو قوه منفی از يك عدد

$$a^{-m} \times a^{-m'} = a^{-(m+m')}$$

ب- خارج قسمت دو قوه منفی از يك عدد :

$$\frac{a^{-m}}{a^{-m'}} = a^{-m+m'}$$

ج - قوه منفی حاصل ضرب چند عدد

$$(abc) - m = a - m \times b = m \times c - m$$

د - بقوه منفی رساندن قوه منفی يك عدد

$$(a - m) - m' = a m m'$$

این دوابطه بر حسب تغییر علامت m و m' متغیر میباشند.

ه - قوه منفی کسری:

$$a - \frac{p}{q} = \frac{p}{\sqrt{a^q}}$$

VII - جمع جمل جبری

۳۴ - برای جمع چند جمله جبری متشابه یکی از آنها را نوشته و ضرائب آنها را جمع جبری مینمائیم.

۳۵ - برای جمع چند کثیرالاجمله ، جمل متشابه را به هم جمع نموده و جمل غیر متشابه را دنبال آنها مینویسیم.

VIII - تفریق جمل جبری

۳۶ - برای تفریق دو کثیرالاجمله علامت جمل کاسته را تغییر داده و با کاهشیاب جمع جبری مینمائیم .

IX - ضرب جمل جبری

۳۷ - حاصل ضرب چند يك جمله يك جمله ایست كه ضربیش مساوی حاصل ضرب ضرائب آنها بوده شامل تمام حروف آن جمل باشد ، نمای هر يك از حروف مساوی مجموع نمائیهات كه آن حرف در هر يك جمله داشته باشد .

۳۸ - برای ضرب یکجمله در يك كثيرالجمله يك - جمله مزبور را در هر يك از جمله كثيرالجمله ضرب میمائیم و حاصلها را با هم جمع جبری میکنیم .

۳۹ - برای ضرب دو كثيرالجمله هر يك از جمله كثير - الجمله اول را در كثيرالجمله دوم ضرب نموده و حاصلها را با هم جمع جبری میکنیم .

۱. تقسیم جمل جبری

۴۰ - برای تقسیم دو جمله جبری ضرائب آنها را تقسیم جبری نموده اجزاء نظایر هم را برهم تقسیم میکنیم ، مثال :

$$\begin{array}{r} ۱۲a^۴ - ۱۵a^۳ \\ ۴a^۲ \overline{) ۱۲a^۴ - ۱۵a^۳} \end{array}$$

۴۱ - برای تقسیم يك كثيرالجمله بر يكجمله اول كثيرالجمله مقسوم را بر حسب قوای نزولی مرتب نموده بعد هر يك از جمله را بر يكجمله مقسوم علیه تقسیم میمائیم و خارج قسمتها را با هم جمع جبری میکنیم . مثال :

$$\begin{array}{r} ۱۲a^۴ - ۱۵a^۳ - ۲۴a^۲ \\ ۴a^۲ \overline{) ۱۲a^۴ - ۱۵a^۳ - ۲۴a^۲} \end{array}$$

۴۲ - برای تقسیم دو كثيرالجمله آنها را بترتیب قوای نزولی مرتب نموده جمله اول مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمله مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم کم میکنیم تا اولین باقیمانده بدست آید ، بعد اولین جمله مانده را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمله مقسوم علیه ضرب میمائیم و حاصلها را از جمله های مانده تقسیم میکنیم تا دومین مانده

بدست آید و همین طریق عمل را ادامه می‌دهیم تا وقتی که باقیمانده دیگر بر مقبوم علیه قابل قسمت نباشد.

$$\begin{array}{r}
 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 - (1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \\
 \hline
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 - (0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \\
 \hline
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 - (0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \\
 \hline
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\
 - (0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \\
 \hline
 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0
 \end{array}$$

۴۳- قابلیت تقسیم کثیرالاجزاه از x بر $(x+a)$ - کثیرالاجزاه $P(x)$ بر $(x+a)$ وقتی قابل قسمت است که اگر در $P(x)$ بجای x ، $-a$ قرار دهیم حاصل صفر شود یعنی $P(-a) = 0$ مثال :

$$x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + a^3$$

بر $x+a$ قابل قسمت است زیرا چون در آن بجای x مقدار $(-a)$ را قرار دهیم حاصل صفر می‌شود.

همچنین $P(n)$ بر $x-a$ وقتی قابل قسمت است که اگر در آن بجای x مقدار a بگذاریم حاصل صفر شود.

۴۴- اتحادهای مهم

۴۴- تعریف- اتحاد عبارت از یک تساوی است که برای مجموع مقادیری که در دو طرف آن بجای حروف قرار دهیم همواره

صحیح باشد. برای ممتاز ساختن اتحادها از تساویهای معمولی غالباً بین طرفین بجای علامت \equiv گذاشته میشود.

$$(۱) (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(۲) (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(۳) (a-b)(a+b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(۴) (a+b+c+d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$(۵) (a+b)^2 \equiv a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2$$

$$(۶) (a-b)^2 \equiv a^2 - 2a^2b + 2ab^2 - b^2$$

$$(a^2 + b^2) \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^2 - b^2) \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

۴۵ رابطه قیتاغورت :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \equiv ab$$

۴۶ رابطه اولر :

$$a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) \equiv 0$$

۴۷ - رابطه استوارت :

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + (c-b)(a-c)(b-a) \equiv 0$$

۴۷ - بینم (دو جمله) نیوتن

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} a^{n-p} a^p + \dots$$

$$\dots + a^n$$

XII ریشه و ریشگی ها

تعریف - ریشه m ام عدد Λ عددی است مانند a که اگر بقوه m ام برسد حاصل مساوی Λ گردد

$$a^m = \Lambda \quad m\sqrt{\Lambda} = a$$

m را نماینده یا شمار ریشگی گویند.

۴۹ - ریشه اعداد جبری

(۱) ریشه زوج هر عدد مثبت دو عدد قرینه است،

$$\sqrt[4]{625} = \pm 5$$

(ب) اعداد منفی دارای ریشه زوج نیستند.

(ج) علامت ریشه فرد هر عدد یا علامت خود آن یکست.

۵۰ - ریشه دوم -۱ عددیست موهوم و آنرا مساوی i

فرش میکنند،

$$\sqrt{-1} = i$$

۵۱ - اگر نماینده ریشگی و نمای مقدار زیر آنرا در

عدد ضرب یا بر عددی تقسیم کنند در مقدار ریشگی تغییری حاصل نمیشود،

$$m\sqrt{a^p} = n m\sqrt{a^p n} = \frac{m}{n} \sqrt{\frac{a^p}{n}}$$

۵۲ - تجویز دل چند ریشگی بیك نماینده -

برای تجویز دل چند ریشگی بر ریشگی‌هایی که دارای يك نماینده باشند كوچك ترین مضرب مشترك نماینده های ریشگی‌ها را نماینده مشترك قرار داده و آنرا بر نماینده هر ریشگی تقسیم و حاصل را در نمای مقدار زیر ریشگی ضرب مینمائیم.

مثال - مینخواهیم نماینده ریشگی‌های \sqrt{a} $\sqrt{b^3}$ $\sqrt{m^4}$

را یکی نمائیم، کم ۶ و ۸ و ۹ عدد ۷۲ است پس:

$$\sqrt{m^4} = 72 \sqrt{m^4 \cdot 9} \quad \sqrt{b^3} = 72 \sqrt{b^3 \cdot 8} \quad \sqrt{a} = 72 \sqrt{a \cdot 72}$$

۵۳ - ضرب ریشگی‌ها

۱ - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقدار زیر ریشگی‌ها را ضرب نموده و از حاصل ضرب ریشه m ام میگیریم:

$$m \sqrt{a^p} \cdot m \sqrt{b^q} \cdot m \sqrt{c^r} = m \sqrt{a^p b^q c^r}$$

ب - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك نباشند نخست نماینده ریشگی‌ها را یکی میکنیم سپس مانند حالت قبل ضرب مینمائیم.

۵۴ - تقسیم ریشگی‌ها

۱ - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقادیر زیر ریشگی‌ها را تقسیم نموده و از خارج قسمت ریشه m ام میگیریم

$$\frac{m \sqrt{a^p}}{m \sqrt{b^q}} = \frac{m \sqrt{a^p}}{\sqrt{b^q}}$$

ب - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترک نباشند نخست نماینده آنها را مساوی نموده بعد آنها را تقسیم می‌نمائیم.

۵۵ - برای اینکه عددی را داخل يك ریشگی نمائیم آنرا بقوه نماینده ریشگی رسانده در مقدار زیر ریشگی ضرب می‌کنیم:

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^n}$$

۵۶ - برای اینکه عددی را از زیر ریشگی خارج کنیم نمای آنرا بر نماینده ریشگی تقسیم میکنیم و خارج قسمت را نمای آن عدد در خارج ریشگی و باقیمانده تقسیم را نمای آن عدد در زیر ریشگی قرار میدهیم:

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot b^{11} c^{14} = b^3 c^4 \sqrt[n]{a^4 b^2 c^2}$$

۵۷ - برای اینکه ریشگی را بقوه‌ای برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن قوه برسانیم:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

۵۸ - برای آنکه از ریشه a^m عددی ریشه a^n بگیریم

بگیریم کافی است که از آن ریشه a^{mn} بگیریم

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵۹ - هر ریشه - حرفی را که زیر ریشگی باشد و نتوان آنرا خارج نمود گوییم گویند و اگر از زیر ریشگی خارج شود گوییم یا نامند.

۶۰ - گویا یا نمودن کسری که مختصر جوش گذشتگ باشد .
 ۱ - مخترج کسر يك جمله است - برای گویا کردن آن صورت و مخترج کسر را در عبارت ضرب می‌کنیم که مخترج گویا شود ، مثلاً اگر مخترج $\frac{m}{\sqrt{b}p}$ باشد صورت و مخترج را در $\frac{m}{\sqrt{b}p} \times \frac{m}{\sqrt{b}p}$ ضرب می‌کنیم .

$$\frac{a}{\frac{m}{\sqrt{b}p}} = \frac{a \times \frac{m}{\sqrt{b}p}}{\frac{m}{\sqrt{b}p} \times \frac{m}{\sqrt{b}p}} = \frac{a \times \frac{m}{\sqrt{b}p}}{\frac{m^2}{b}}$$

تعریف - مزدوج دو جمله $a+b$ دو جمله $a-b$ است .
 ب - مخترج کسر دو جمله است - برای گویا کردن کسر صورت و مخترج آن را در مزدوج مخترج ضرب می‌کنیم

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

XIII - معادلات

۶۱ - تعریف - معادله عبارت از يك تساوی است که

فقط دو طرف آن بازاریک یا چند مقدار معین که بجای مجهول آن قرار میدهیم باید یکدیگر مساوی شوند.

۶۲ - توجه کنید! فرق معادله با اتحاد این است که معادله بازاریک یا چند مقدار معین صحیح است و اتحاد بازاریک جمع مقادیر .

۶۳ - خواص معادلات

۱ - اگر بر طرفین معادله یک عدد چپری اضافه کنیم در معادله تفاوتی حاصل نمیشود .

۲ - اگر طرفین معادله را بر یک عدد تقسیم یا در یک عدد ضرب بنمائیم در معادله تغییری حاصل نمیشود .

۳ - اگر عددی را از یک طرف معادله به طرف دیگر ببریم باید علامت آنرا تغییر دهیم .

۶۴ - حل و بحث معادلات درجه اول

معادله درجه اول یک مجهولی پس از اختصار بصورت کلی $ax = b$ نوشته میشود .

اگر $a \neq 0$ باشد معادله دارای یک ریشه $x = \frac{b}{a}$ خواهد بود .

اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد معادله غیر ممکن است .

اگر $a = 0$ و $b = 0$ باشد معادله مبهم است .

اگر $a \neq 0$ و $b = 0$ باشد ریشه معادله صفر است .

برای اینکه دو معادله درجه اول $ax = b$ و $a'x = b'$

دارای یک ریشه باشند باید $ab' = ba'$ باشد .

۶۵ - دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول
 دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول پس از
 اختصار باین صورت نوشته میشود:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

برای حل دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول چهار طریقه معمول است :

۱ - طریقه تعویض - از معادله اول بفرش معلوم بودن یکی از مجهولها مجهول دیگر را بدست آورده در معادله دوم قرار میدهیم، در نتیجه يك معادله يك مجهولی درجه اول پیدا میشود که با حل آن یکی از مجهولها بدست میآید. با معلوم شدن يك مجهول پیدا کردن دیگری بوسیله یکی از آن دو معادله خیلی آسان است .

ب - طریقه حذف - در این طریقه ضرایب یکی از مجهولها را در دو معادله بدو عدد قرینه تبدیل میکنیم، از جمع کردن دو معادله يك معادله يك مجهولی بدست میآید که با حل آن يك مجهول پیدا میشود . با معلوم شدن يك مجهول پیدا کردن دیگری ساده است.

ج - طریقه قیاسی - یکی از مجهولات را بفرش معلوم بودن مجهول دیگر در هر يك از دو معادله پیدا نموده دو مقدار را که برای آن بدست میآید مساوی قرار میدهند. پس از حل این تساوی یکی از مجهولات بدست میآید و با معلوم بودن يك مجهول میتوان مجهول دیگر را از یکی از دو معادله پیدا نمود .

د - یوسیده فرمولهای گرامر - ریشه‌های دو معادله دو مجهولی درجه اول عبارتند از :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

. اگر $ab' - ba' \neq 0$ باشد معادله دارای جواب است

۶۶ - معادله درجه دوم

ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا اگر $b' = 0$ و فرض شود $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$ $\Delta' = b'^2 - 4ac$ $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a}$

ا - اگر $\Delta' > 0$ (مثبت) منفی باشد معادله دارای ریشه نیست.

ب - اگر $\Delta' = 0$ (صفر) مساوی صفر باشد معادله دارای

ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b'}{a}$ است.

شرط لازم و کافی برای اینکه یک معادله درجه دوم

دارای ریشه باشد آنستکه Δ' مثبت آن مثبت باشد.

۶۷ - روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

ا - حاصل جمع ریشه‌ها

$$x' x'' = \frac{c}{a}$$

ب - حاصل ضرب ریشه‌ها

ج - تفاضل ریشه‌ها

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

۶۸ - حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های یک

معادله درجه دوم.

اگر مجموع قوای درام ریشه‌های معادله درجه دوم را

S_p فرض کنیم یعنی $S_p = x'P + x''P$ باشد روابط ذیل را خواهیم داشت :

$$S_1 = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3 = \frac{4abc - b^3}{a^3}$$

$$aS_2 + bS_1 + 4c = 0$$

$$aS(P+2) + bS(p+1) + cSp = 0$$

۶۹ - اگر S مجموع و P حاصل ضرب دو عدد باشد

آن دو عدد ریشه‌های این معادله‌اند: $x^2 - Sx + P = 0$

۷۰ - اگر d تفاضل و p حاصل ضرب دو عدد باشد آن

دو عدد ریشه‌های این معادله می‌باشند: $x^2 - dx - P = 0$

۷۱ - علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۱ - اگر $\frac{c}{a} > 0$ و یا $ac < 0$ باشد x' و x''

مختلف‌العلامه هستند.

حل و بحث و معادلات

صفحه ۵۷

ب - اگر $\frac{c}{a} > 0$ (یا $a < 0$) باشد و $a < 0$ باشد و $\Delta > 0$ باشد

ج - اگر $\frac{c}{a} > 0$ (یا $a < 0$) و $a < 0$ و $\Delta > 0$ باشد

هر دو ریشه منق‌ی هستند .

د - اگر $\frac{c}{a} > 0$ (یا $a < 0$) و $a < 0$ و $\Delta > 0$ باشد هر

دو ریشه مثبت میباشند .

برای آسان شدن بحث فرض میکنیم ریشه ای که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است x' و ریشه دیگر x'' باشد. جدول ذیل علائم ریشه‌ها را مشخص میسازد :

علائم ریشه‌ها	$\frac{c}{a}$	Δ
$x' > 0, x'' > 0$	+	+
$x' < 0, x'' < 0$	+	+
$x' = 0, x'' = 0$	0	+
$x' = 0, x'' < 0$	0	+
$x' < 0, x'' > 0$	-	+
$x' > 0, x'' < 0$	-	+
$ x' = x'' $	-	0
$x' = x'' > 0$	-	-
$x' = x'' < 0$	-	-
ریشه‌ها موهومند	نقطه‌ای نیست	منفی

XIV - سه جمله درجه دوم

$$y = ax^2 + bx + c$$

۷۲ - سه جمله

یا این صورت نوشته میشود :

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}$$

حالات اول - اگر Δ یعنی $b^2 - 4ac > 0$ باشد $y = 0$ دارای دو ریشه x' و x'' خواهد بود و سه جمله بصورت

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

درمیآید. در اینصورت اگر به x مقادیر خارج دو ریشه داده شود علامت سه جمله یا علامت a یکی است و اگر مقادیری بین x' و x'' بدهیم علامت سه جمله مخالف علامت a است.

$$b^2 - 4ac = 0$$

حالات دوم -

در اینصورت

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

و علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.

$$b^2 - 4ac < 0$$

حالات سوم -

در اینصورت $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + m$ است

و باز هم علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.خلاصه - علامت سه جمله درجه دوم با a مقادیری که

بین ریشه‌ها باشند (در صورت وجود دو ریشه) مخالف علامت a و بازاء سایر مقادیر هم‌واافق علامت a است.

۷۳ - مقایسه عدد با ریشه های سه جمله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c$$

شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α بین ریشه ها قرار داشته باشد آنست که $af(\alpha) \leq 0$ باشد.

ب - شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α کوچکتر از دو ریشه باشد :

$$\alpha < -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha > -\frac{b}{2a} \text{ و } af(\alpha) > 0 \quad \Delta > 0$$

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه α بزرگتر از دو ریشه باشد :

$$\alpha < -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha > -\frac{b}{2a} \text{ و } af(\alpha) > 0 \quad \Delta > 0$$

۷۴ - مقایسه دو عدد α و β با ریشه های سه جمله

$$ax^2 + bx + c$$

(برای آسان شدن نوشتن α را از β و x'' را از x' کوچکتر فرخت میکنیم). هرگاه :

$$\begin{array}{lll} \alpha < x'' < \beta < x' & \text{و} & af(\alpha) > 0 \\ x'' < \alpha < x' < \beta & \text{و} & af(\beta) > 0 \\ \alpha < \beta < x'' < x' & \Delta > 0 & \alpha < \beta < -\frac{b}{2a} \\ x'' < x' < \alpha < \beta & \Delta < 0 & -\frac{b}{2a} < \alpha < \beta \\ x'' < \alpha < \beta < x' & & af(\alpha) < 0 \\ f(\alpha)f(\beta) < 0 & & f(\alpha)f(\beta) > 0 \end{array}$$

۷۵ - مقایسه ریشه های دو سه جمله

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های سه‌جمله

$$f_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0$$

و x_1' و x_2' ریشه‌های سه‌جمله باشند :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه‌جمله دارای

يك ریشه مشترك باشند :

$$R = (ac' - ca')(ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

اگر $R = 0$ و $ab' - ba' \neq 0$ باشد ریشه مشترك عبارتست از

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $R \neq 0$ باشد دو سه‌جمله دارای ریشه مشترك نیستند.

ب- شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه‌جمله دارای

دو ریشه مشترك باشند آنستکه

$$\Delta > 0 \text{ و } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ باشد}$$

ج- شرط لازم و کافی برای اینکه يك ریشه يکی از

سه جمله‌ها مابین ریشه‌های سه جمله دیگر واقع باشد آنستکه

$R < 0$ باشد به علاوه :

$$\text{اگر } R < 0 \text{ و } \frac{b}{2a} < \frac{b'}{2a'} \text{ ، } x_1' < x_2' < x_1 < x_2$$

$$\text{اگر } R < 0 \text{ و } \frac{b}{2a} > \frac{b'}{2a'} \text{ ، } x_2' < x_1' < x_2 < x_1$$

۷۶ معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

۷۶ - معادله دو مجهولی $ax^2 + bx + c = 0$

۱ - شرط کافی برای اینکه این معادله دارای دو

ریشه باشد آنستکه $-\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$ باشد و دو ریشه آن عبارتند از :

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله فوق دارای چهار ریشه مشخص باشد آنستکه :

$$\frac{c}{a} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} > 0 \quad \text{و} \quad b^2 - 4ac > 0$$

۳ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دو مجهولی دارای ریشه مضاعف باشد این است که

$$\frac{b}{a} > 0 \quad \text{و} \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \text{باشد و ریشه آن عبارتست از}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{4a}}$$

۴ - اگر $c = 0$ باشد دو تا از ریشه‌های معادله فوق

صفر می‌باشند و دو ریشه دیگر $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{4a}}$ خواهند بود اگر $\frac{b}{a} > 0$ باشد.

۷۷ معادلات همگوسه

تعریف - معادله را همگوسه گویند در صورتیکه ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند مثلاً اگر a یکی از

ریشه‌های معادله معکوسه درجه دوم باشد ریشه دیگر آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود.
در معادلات معکوسه ضرایب جمله هائیکه از وسط معادله بیک فاصله باشند مساوی هستند.

۷۸ - حل معادلات معکوسه
معادله معکوسه‌ای که بزرگترین درجه معیول آن فرد باشد برای $x \pm 1$ قابل قسمت است بشا بر این ± 1 یکی از ریشه‌های آن است و برای پیدا کردن سایر ریشه‌ها معادله را بر $x \pm 1$ تقسیم نموده ریشه خارج قسمت را مطابق قواعد پیش پیدا میکنیم.
ب - معادلات معکوسه‌ای که درجه آنها زوج باشد برای نمونه معادله درجه چهارم معکوسه زیر را حل میکنیم :

$$a = -bx - + cx^4 + bx^4 + ax^4$$

طرفین معادله را بر x^4 تقسیم میکنیم

$$a = -bx - + cx + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^4}$$

از ضرایب مساوی فاکتور میگیریم :

$$a = -b(x + \frac{1}{x}) + c(x + \frac{1}{x})$$

فرض میکنیم $x + \frac{1}{x} = y$ آنوقت $y^4 - 2 = x^4 + \frac{1}{x^4}$ و معادله بصورت زیر در میآید.

$$a = -b(y^4 - 2) + cy$$

$$ay^4 + by + c - 2a = 0$$

برای حل و بحث بشماره ۶۶ مراجعه شود .

۷۹ - معادلات معکوسه درجه سوم

۱ - معادله نوع اول معکوسه درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + a = 0$$

دارای يك ریشه $x = -1$ است و ریشه های دیگرش ریشه های

معادله درجه دوم $ax^2 + (b-a)x + a = 0$ میباشد

۲ - معادله نوع دوم

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

دارای يك ریشه $x = 1$ است و ریشه های دیگر آن ریشه های معادله

درجه دوم $ax^2 + (a+b)x - a = 0$ میباشد

۸۰ - معادله معکوسه درجه چهارم

۱ - نوع اول $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

اگر $y = x + \frac{1}{x}$ ریشه های معادله درجه دوم $ay^2 + by + c - 2a = 0$

باشد (۷۸) ریشه معادله معکوسه عبارتند از ریشه های معادله

$$x^4 + yx^3 + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^4 - y'x^3 + 1 = 0$$

۲ - نوع دوم

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

ریشه های این معادله عبارتند از: $x = \pm 1$ و ریشه های معادله

$$ax^2 + bx - a = 0$$

۸۱ - معادله معکوسه درجه پنجم

۱ - نوع اول

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

دارای يك ریشه $x = -1$ است و ریشه های دیگر آن ریشه های

معادله معکوسه درجه چهارم ذیل است:

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b+a)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

ب - نوع دوم

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + a = 0$$

که دارای يك ریشه $x = 1$ میباشد و ریشه های دیگر آن ریشه های معادله درجه چهارم

$$ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

۸۲ معادلات اصم - برای حل معادلات اصم طرفین معادله را تقوّه میرسانیم تا معادله منطقی بدست آید، بعد معادله حاصل را بر طبق قواعد فوق حل میکنیم.

مثال

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+10}$$

طرفین را بقوّه ۲ میرسانیم :

$$x+10 = x+6+2\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

و یا

$$x-22 = 2\sqrt{x-6} \Rightarrow \sqrt{x-6} = 11-x$$

باز طرفین را بقوّه ۲ میرسانیم

$$x^2 - 44x + 484 = x^2 - 12x + 36 \Rightarrow 32x = 448 \Rightarrow x = 14$$

$$x^2 - 44x + 484 = x^2 - 12x + 36 \Rightarrow 32x = 448 \Rightarrow x = 14$$

$$x = 14 \quad x = \frac{44}{3}$$

۸۳ - تبصره - چون طرفین معادله را بقوّه میرسانیم ممکن است ریشه های اضافی پیدا شود. در مثال فوق $\frac{44}{3}$ ریشه اضافی و غیر قابل قبول است.

۸۷۱ نامساوی

۸۴۴- تعریف - اگر دو عبارت با هم مساوی نباشند یکی از دیگری کوچکتر است یا بزرگتر؛ اگر کوچکتر باشد با این علامت $<$ و اگر بزرگتر است با این علامت $>$ نمایش میدهند و آنرا نامساوی میگویند.

۸۵- خواص نامساوی

ا- اگر در طرفین نامساوی دو عدد مساوی اضافه یا کم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمی‌شود.

ب- اگر طرفین نامساوی را در عدد مثبتی ضرب یا بر يك عدد مثبت تقسیم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمیشود.

ج- اگر طرفین نامساوی را در يك عدد منفی ضرب یا بر يك عدد منفی تقسیم نمائیم جهت آن تغییر میکند.

د- اگر طرفین نامساوی را بقوه فرد برسانیم در آن تغییری پیدا نمی‌شود.

ه- اگر طرفین يك نامساوی را كه هر دو مثبت باشند بقوه زوج برسانیم در نامساوی تغییری پیدا نمیشود.

و- اگر طرفین يك نامساوی را كه هر دو منفی باشند بقوه زوج برسانیم جهت نامساوی تغییر میکند.

۸۶- نامساوی درجه اولی يك مجهول پس از اختصار بصورت $ax > a$ نوشته میشود.

اگر $a > 0$ باشد جوابهای نامساوی عبارتند از

$$\frac{b}{a} < x$$

اگر $a < 0$ » » » » »

$$\frac{b}{a} > x$$

۷۸ - نامساوی درجه دوم $x^2 + 12x + 18 > 0$ را در $x = 1$ و $x = 2$ بررسی کنید.

اولاً، اگر $x = 1$ باشد،

۱ - در صورتیکه $x = 1$ باشد نامساوی بازاء $x = 1$ همیشه مقادیر

x محقق است.

ب - در صورتیکه $x = 2$ باشد نامساوی غیر ممکن است.

ثانیاً، اگر $x = 2$ باشد:

۱ - در صورتیکه $x = 2$ باشد نامساوی بازاء $x = 2$ همیشه

مقادیر x محقق است مگر بازاء $x = 2$ که صفر میشود.

ب - در صورتیکه $x = 3$ باشد نامساوی غیر ممکن است:

ثالثاً، اگر $x = 3$ باشد

۱ - در صورتیکه $x = 3$ و $x = 4$ باشند بازاء مقادیری

کوچکتر از $x = 3$ یا بزرگتر از $x = 4$ نامساوی محقق است.

ب - در صورتیکه $x = 4$ باشد

نامساوی بازاء مقادیر x مابین $x = 3$ و $x = 4$ محقق است.

دو $x = 4$ و $x = 5$

۸۸ - نامساویهای درجه m ام

برای حل نامساویهای درجه m ام آنها را به حاصل ضرب

عوامل تجزیه نموده بعداً علامت هر یک از عوامل را پیدا کرده

در جدولی ثبت میکنیم و از روی جدول نتیجه معلوم را پیدا میکنیم.

مثال - نامساوی ذیل را حل نمائید

$$x^4 - 19x^3 + 12x^2 - 12x + 1 > 0$$

آنرا به حاصل ضرب عوامل تجزیه میکنیم:

$$(x - 4)(x - 3)(x - 1)(x - 2)(x - 1) > 0$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x = 1$		$+$	$+$	$+$
$x = 2$			$+$	$+$
$x = 2$				$+$
$f(x)$		$+$		$+$

ریشه های نامساوی عبارتند از ۱

۸۹ - نامساوی کسری

برای حل نامساویهای کسری صورت و مخرج را در مخرج

ضرب میکنیم و علامت صورت کسر حاصل را پیدا میکنیم .

xvii قصص احمد حسن ابي

۹۰- تعریفی - تصاعد حسابی رشته اعدادی است که

تفاضل هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد و آن مقدار ثابت را **قدر نسبت** تصاعد مینامند.

۹۱ - اگر در تعدادی، هر جمله از جمله قبیل از آن

بزرگتر باشد تصاعد صعودی والا نزولی است. در حالت اول

قدر نسبت عددی است. مثبت و در حالت دوم عددی منفی است .

۹۲ - اگر در تصاعد حسابی a جمله اول و A جمله n ام

و r قدر نسبت باشد :

1. مقدار جمله n ام $= a + (n - 1)r$

ب - حاصل جمع n جمله اول : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ج - اگر دو واسطه حسابی بین دو جمله متوالی یک تصاعد حسابی درج 2^2 قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 2$$

۹۳ - در تصاعد حسابی محدود که عدد جمل زوج باشد مجموع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار است ثابت و مساویست با مجموع دو جمله اول و آخر و اگر عدد جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با واسطه عددی هر دو جمله متساوی البعد از طرفین .

۹۴ - دسته‌های مختلف :

۱ - حاصل جمع n عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب - حاصل جمع n عدد زوج متوالی در سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S_n = n(n+1)$$

ج - مقدار عدد n ام اعداد فرد از سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$1 = 2n - 1$$

د - حاصل جمع n عدد از اعداد فرد سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S_n = n^2$$

ه - حاصل جمع مربعات n عدد متوالی از سلسله طبیعی

اعداد که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

و حاصل جمع مکعبات n عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

XVIII تصاعد هندسی

۹۵- تعریف - تصاعد هندسی رشته اعدادیست که خارج قسمت هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت را قدرنسبت تصاعد هندسی گویند .

۹۶- هرگاه هر جمله از تصاعد از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی و الا نزولی است. در حالت اول قدرنسبت بزرگتر از واحد و در حالت دوم کوچکتر از واحد است .

۹۷- اگر در تصاعدی هندسی a جمله اول ، a جمله n ام و l قدرنسبت باشد :

ا - مقدار جمله n ام : $a_n = ar^{n-1}$

ب - حاصل جمع جمله n اول تصاعد :

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

ج - حاصل ضرب n جمله اول تصاعد :

$$p = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

د - اگر دو واسطه هندسی بین دو جمله متوالی يك تصاعد هندسی درج كنیم q^2 قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$q^2 = \frac{q-1}{\sqrt{q-1}}$$

ه - حد مجموع جمل يك تصاعد هندسی نزولی وقتیكه
 عدد جمل بینهایت زیاد شود :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

۹۸ - در تصاعد هندسی محدود كه عدد جمل زوج باشد حاصل ضرب هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار یست ثابت و مساویست با حاصل ضرب دو جمله اول و آخر و اگر عدد جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با چند حاصل ضرب (واسطه هندسی) هر دو جمله متساوی البعد از طرفین

۹۹ - لگاریتم

۹۹ - تعریف - دو تصاعد نامحدود، یکی هندسی كه جمله اولش يك و قدر نسبت آن q و دومی حسابی كه جمله اولش صفر و قدر نسبت آن 1 باشد، فرض نموده و آنها را جمله به جمله بطوری زیرهم میشویم كه صفر تصاعد حسابی زیر يك از تصاعد هندسی قرار گیرد، باینطریقی :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, q, q^2, \dots, q^{m-1}, q^m, \dots, q^{n-1}, q^n, \dots \\ 0, 1, 2, 3, \dots, m-1, m, \dots, n-1, n, \dots \end{array} \right.$$

دورشته تصاعدی كه بطریقی بالا نوشته شده باشند

لگاریتم

صفحه ۷۸

دستگاه لگاریتم را تشکیل میدهند و در آن هر جمله از تصاعد عددی لگاریتم (\log) جمله نظیرش از تصاعد هندسی و هر جمله از تصاعد هندسی عدد مابازاء یا آنتی لگاریتم جمله نظیرش از تصاعد عددی است؛ مثلاً :

$$21 = 10^{\log 21}$$

$$21 \text{ عدد مابازاء } = 10^{\log 21}$$

و

$$100 = 10^2 \text{ با توجه باینکه } 10^2 = 100, \text{ چون جمله های تصاعد}$$

هندسی همیشه مثبت اند پس فقط اعداد مثبت دارای لگاریتم هستند و اعداد کوچکتر از واحد دارای لگاریتم منفی میباشد همچنین $10^0 = 1$ و $10^{\infty} = \infty$ و همیشه $10^{\log 1} = 1$

۱۰۱- در هر دستگاه لگاریتم عددی را که لگاریتم آن یک است مبنای آن دستگاه مینامند .

۱۰۲- لگاریتم عدد ۱ در دستگاهی مبنای آن عدد است مانند $10^0 = 1$ چون مبنای آن را 10^0 آن برسانیم حاصل مساوی A گردد یعنی :

$$A = 10^0 = 1$$

$$A = 10^x$$

۱۰۳- اگر A و x مثبت باشند همیشه برای عددی که غالباً اصیم خواهد بود، بدست می آید

۱۰۴- هرگاه A در فرض شود ۱ عددی لگاریتم مبنای همیشه مساوی یک است (نمره ۱۰۰)

خواص لگاریتم

۱۰۵- لگاریتم حاصل ضرب چند عدد مثبت مساوی است

با مجموع لگاریتم‌های آن اعداد :

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

۱۰۶- لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با

تفاضل لگاریتم صورت و مخارج :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

۱۰۷- لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آن عدد

با علامت مخالف و آنرا کالگاریتم (Cologarithme) آن عدد نامند یعنی :

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = \text{colog } b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \text{colog } b \quad \text{پس}$$

۱۰۸- لگاریتم قوه m ام هر عدد مساویست با m برابر

لگاریتم آن :

$$\log a^m = m \log a$$

۱۰۹- لگاریتم ریشه m ام هر عدد مساویست با $\frac{1}{m}$ لگاریتم

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

آن عدد

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم (Vulgaires) :

۱۱۰- در دستگاه لگاریتم اعشاری مبنای ده و قدر نسبت

تعباعد عددی یک و قدر نسبت تصاعد هندسی ده میباشد یا بنظر یقی :

$$0.0000000000 : 0.0000000001 : 0.0000000009 : 0.0000000004 : 0.0000000003 : 0.0000000002 : 0.0000000001$$

$$0.0000000000 : 0.0000000001 : 0.0000000002 : 0.0000000003 : 0.0000000004 : 0.0000000005 : 0.0000000006 : 0.0000000007 : 0.0000000008 : 0.0000000009$$

در هر یک

۱۱۱ - لگاریتم اعدادی که محصور بین قوای ۱۰ متوالیه ۱۰ باشند دارای يك جزء صحیح بنام مفسر و يك جزء اعشاری بنام مانتيس می باشد

۱۱۲ - اگر عددی را در یکی از قوای ۱۰ ضرب و یا بر آن تقسیم نمائیم در جزء اعشاری لگاریتم آن تغییری حاصل نمیشود ولی عددی مساوی نماینده آن قوه به مفسر اضافه یا از آن کم میشود :

$$\log(A \cdot 10^m) = \log A + \log 10^m = \log A + m$$

$$\log\left(\frac{A}{10^m}\right) = \log A - \log 10^m = \log A - m$$

۱۱۳ - مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد عددی است مساوی عدد ارقام صحیح همان عدد منهای يك .

۱۱۴ - چون لگاریتم اعداد کوچکتر از واحد منفی است معمولاً آنرا بطریقی زیر تبدیل به مانتيس مثبت و مفسر منفی مینمایند :

فرض میکنیم $10^2 < A < 10^3$ باشد آنرا

بترتیب چنین مینویسیم :

$$10^2 < A < 10^3 \Rightarrow 2 < \log A < 3 \Rightarrow 2 + (10^2 < A < 10^3) - 2 = 2 + (10^2 < A < 10^3) - 2$$

$$= 2 + (10^2 < A < 10^3) - 2 = 2 + (10^2 < A < 10^3) - 2$$

و در موقع نوشتن برای اینکه نمایش دهند فقط مفسر

منفی است علامت - را بالای مفسر میگذارند، یا بطریقی :

$$\log A = 2 + (10^2 < A < 10^3) - 2$$

تبدیل - کل لگاریتم اعداد را نیز بطریقی بالا تبدیل

بمفسر منفی و مانتیس مثبت می‌نمایند.
مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد برابر است با
تعداد صفرهایی که در طرف چپ اولین رقم یا معنای آن عدد
قرار دارد.

۱۱۵- اگر لگاریتمهای اعداد در دستگاهی بمبنای a در دست
باشند و بخواهیم لگاریتمهای آنها را در دستگاهی بمبنای b
بدست آوریم باید لگاریتمهای آنها را که بمبنای a است در
مقدار ثابت $\log_a b$ (عکس لگاریتم b در دستگاه بمبنای a)
ضرب کنیم (مقدار ثابت $\log_a b$ را جدول module گویند)
چهار عمل اصلی در لگاریتم

۱۱۶- در جمع لگاریتمها مانتیسها را باهم جمع نموده
و مفسرها را جمع جبری می‌نماییم.

۱۱۷- در تفریق لگاریتمها بجای مفروق کل لگاریتم عدد
را مینویسیم و عمل تفریق بجمع تبدیل میشود.

۱۱۸- در ضرب عدد صحیح در لگاریتم عدد بزرگتر از يك
مانند ضرب اعداد اعشاری عمل می‌نماییم.

۱۱۹- برای ضرب عدد در دست در لگاریتم عدد کوچکتر
از يك چون لگاریتم عدد کوچکتر از يك سر کب از مفسر
منفی، مانتیس مثبت است عدد در دست را در مانتیس ضرب نموده
و بین جزء صحیح حاصل با حاصل ضرب آن عدد در مفسر منفی
جمع جبری بجا می‌آوریم.

۱۲۰- در تقسیم لگاریتم عدد بزرگتر از يك در عدد صحیح
مانند تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح عمل می‌نماییم.

۱۲۱- در تقسیم لگاریتم عدد کوچکتر از يك بر عدد صحیح

لگاریتم دو حالت اتفاق می افتد .

۱ - مفسر منفی یثنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت است ، در این صورت مفسر و مانده را جدا جدا بر مقسوم علیه تقسیم نموده خارج قسمت را بصورت لگاریتم عدد کوچکتر از يك می نویسیم .

$$\begin{array}{r} \text{مثال: } 74444 \div 8 = 9255 \text{ با باقی مانده } 4 \\ 18106 \div 2 = 9053 \end{array}$$

۲ - مفسر منفی به تنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت نیست ، در این حال آنقدر واحد منفی بمفسر منفی می افزائیم تا قابل قسمت شود و بهمین اندازه هم واحد مثبت بممانده می مثبت اضافه میکنیم تا در لگاریتم تغییری حاصل نگردد بعد مانند حالت قبل عمل مینمائیم :

$$\begin{array}{r} \text{مثال: } 74665 \div 5 = 14933 \text{ با باقی مانده } 5 \\ 74665 \div 5 = 14933 \\ 14933 \div 5 = 2986 \text{ با باقی مانده } 3 \\ 2986 \div 5 = 597 \text{ با باقی مانده } 1 \end{array}$$

۱۲۲ - در تقسیم لگاریتم بر لگاریتم نیز دو حالت اتفاق می افتد :

۱ - اگر مقسوم و مقسوم علیه هر دو لگاریتم مثبت باشند مانند تقسیم دو عدد اعشاری عمل مینمائیم .

۲ - اگر مقسوم و مقسوم علیه یا یکی از آنها منفی است به جای آن کل لگاریتم میگذاریم و مانند حالت قبل عمل مینمائیم .

جدولهای لگاریتم

۱۲۳ - جدولهای لگاریتم جدولهایی است که یکمات آنها میتوان لگاریتمهای اعداد را بدست آورد ، یا عددهائی را که لگاریتمهایشان در دست است پیدا نمود . چون تعیین مقسوم لگاریتم آسان است در جدول فقط مانتیس لگاریتم اعداد را ثبت کرده اند .

۱۲۴ - جدولهای لگاریتم بر دو قسم اند :

۱ - جدولهای بزرگ که در آنها لگاریتم اعداد تا هفت رقم اعشار داده شده است .

۲ - جدولهای کوچک که در آنها لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰ با پنج رقم اعشار نوشته شده است .

در محاسبات عادی میتوان از جدولهای کوچک استفاده نمود و نتیجه محاسبه را با تقریب کافی بدست آورد از جدولهای کوچک که بیشتر مورد استفاده دانش آموزان است . جدول دویوئی است که ترجمه فارسی آن نیز از طرف وزارت فرهنگ چاپ شده . طرز استفاده از جدول در هر یک از آنها نوشته شده است .

۱۲۵ - مادر جدول صفحه ۷۷ مانتیس لگاریتم عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را درج میکنیم *

لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد
۹۸۵۰۸	۸	۹۸۵۰۸	۸	۹۸۵۰۸	۸	۹۸۵۰۸	۸	۹۸۵۰۸	۸
۹۸۵۰۸	۷	۹۸۵۰۸	۷	۹۸۵۰۸	۷	۹۸۵۰۸	۷	۹۸۵۰۸	۷
۹۸۵۰۸	۶	۹۸۵۰۸	۶	۹۸۵۰۸	۶	۹۸۵۰۸	۶	۹۸۵۰۸	۶
۹۸۵۰۸	۵	۹۸۵۰۸	۵	۹۸۵۰۸	۵	۹۸۵۰۸	۵	۹۸۵۰۸	۵
۹۸۵۰۸	۴	۹۸۵۰۸	۴	۹۸۵۰۸	۴	۹۸۵۰۸	۴	۹۸۵۰۸	۴
۹۸۵۰۸	۳	۹۸۵۰۸	۳	۹۸۵۰۸	۳	۹۸۵۰۸	۳	۹۸۵۰۸	۳
۹۸۵۰۸	۲	۹۸۵۰۸	۲	۹۸۵۰۸	۲	۹۸۵۰۸	۲	۹۸۵۰۸	۲
۹۸۵۰۸	۱	۹۸۵۰۸	۱	۹۸۵۰۸	۱	۹۸۵۰۸	۱	۹۸۵۰۸	۱
۹۸۵۰۸	۰	۹۸۵۰۸	۰	۹۸۵۰۸	۰	۹۸۵۰۸	۰	۹۸۵۰۸	۰

XX - ربح مرکب

۱۲۶ - **تهرینف** - اگر مبلغی را با نرخ معینی بهرا بچه بگذاریم و در آخر هر سال سود آنرا به سرمایه افزوده سرمایه سال بعد قرار دهیم گوئیم آن مبلغ بر ربح مرکب داده شده است.

۱۲۷ - در ربح مرکب معمولاً نرخ عبارتست از سودی که ریال در یکسال

۱۲۸ - اگر a سرمایه و r نرخ و A مجموع سرمایه و سود پس از n سال باشد.

$$A = a(1+r)^n$$

$$\log A = \log a + n \log(1+r) \quad (1)$$

از فورمول (۲) میتوان فورمولهای زیر را بدست آورد:

$$1) \quad \log a = \log A - n \log(1+r)$$

$$2) \quad n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$$

$$3) \quad \log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}$$

فورمول (۲) در مواردیکه مدت صحیح یا کسری باشد استعمال میشود.

XXI - قسط السنین

۱۲۹ - **تهرینف** - قسط السنه مبلغ پولی است که کسی برای تشکیل سرمایه یا پرداخت قرض مرتباً در اول یا آخر هر

سال در مدت چند سال میپردازد .

۱۳۰ - قسط‌السنین برای تشکیل سرمایه

فرض میکنیم n ریال مبلغی باشد که در اول هر سال پرداخته میشود و r سود سالانه یکریال در یکسال و A ریال مبلغ آخری که در آخر سال n ام بدست میآید باشد در اینصورت :

$$A = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$a = \frac{Ar}{1+r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1}$$

۱۳۱ - قسط‌السنین - محاسبه r یا n از روی سه عامل معلوم دیگر بتقریب بکمک جدولهای عددی مخصوص بدست میآید .

۱۳۲ - قسط‌السنین برای استهلاک

- اگر A ریال مبلغ دریافتی و a ریال مبلغ قسط پرداختی در آخر هر سال و n عدد اقساط و r سود سالانه یک ریال باشد .

$$a = Ar \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

مبلغ استهلاک a در آخر سال اول عبارت خواهد بود
 $Ar = a - a_1$ و مبلغ استهلاک a_1 در آخر سال p ام عبارتست از :

$$a_p = a - (Ar)(1+r)^{p-1} = a_p - a_1(1+r)^{p-1}$$

XXII نمایش هندسی

۱۳۳ - تعریف - برای اینکه نقطه N را بموازات امتداد \triangle بر خط DA تصویر کنیم از M خطی موازی \triangle میکشیم تا D را قطع کند. تصویر نقطه N بموازات صفحه D بر خط \triangle محل تلاقی \triangle با صفحه ایست که از N بموازات D رسم شود.

۱۳۴ محور - مبدأ - مختصات - هرگاه از روی خط نامحدود xx' جهتی مثلا از چپ بر راست، را مثبت اختیار کنیم آن خط تشکیل یک محور میدهد. نقطه ثابت (O) واقع بر محور را که نقاط دیگر محور بوسیله فاصله شان از آن مشخص میگرددند مبدأ میگویند.

خطی را که از مبدأ بیك نقطه غیر واقع بر محور وصل کنند شعاع حامل آن نقطه نامند، برای معین ساختن جای هر نقطه بر روی خط، صفحه یا فضا مشخصاتی لازمست که آنها را مختصات گویند.

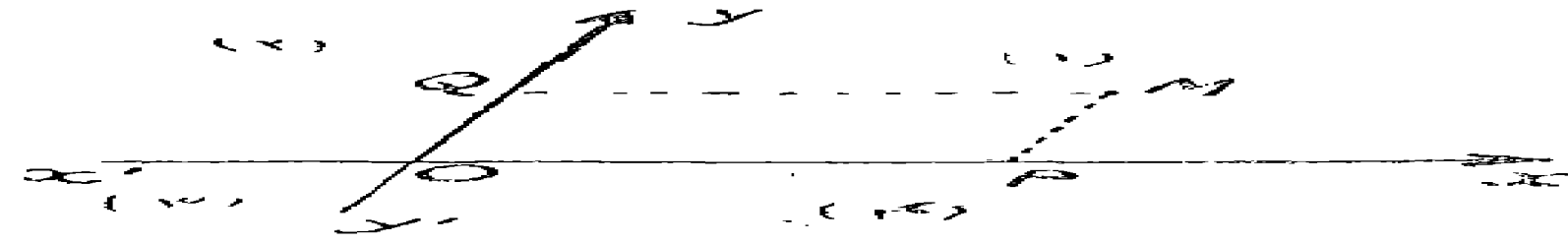
فاصله هر نقطه واقع بر محور را از مبدأ O یا O' یا آن نقطه نامند. طول نقطه برای مشخص ساختن هر نقطه واقع بر محور کافیست.

هر نقطه صفحه ممکن است بوسیله تصاویری بر دو محور متقاطع (مختصات دکارتی) یا بكمات طول شعاع حامل و زاویه این شعاع با محور (مختصات قطبی) مشخص شود.

هر نقطه در فضا بوسیله تصاویری بر سه محور متقاربت غیر واقع در يك صفحه (مختصات دکارتی) یا با شعاع حامل و زاویه

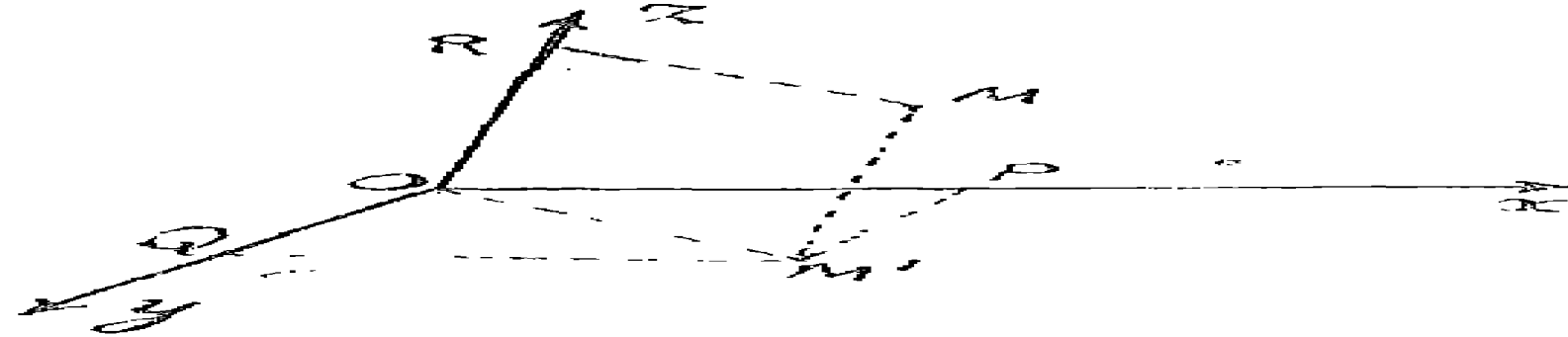
این شعاع یا يك صفحه كه بر مبدأ میگذرد و زاویه تصویر شعاع حاصل بر روی این صفحه با محور ی كه بر مبدأ مرور نماید (مختصات قطبی) معین میگردد.

۱۳۵ - مختصات دکارتی - (در صفحه - دو محور



شکل ۱

دو محور نا متعام Ox و Oy ، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم میکنند (ش ۱) در ناحیه ۱ هر دو مختص مثبت، در ناحیه ۲ طول منفی و عرض مثبت، در ناحیه ۳ هر دو منفی و در ناحیه ۴ طول مثبت و عرض منفی میباشد.



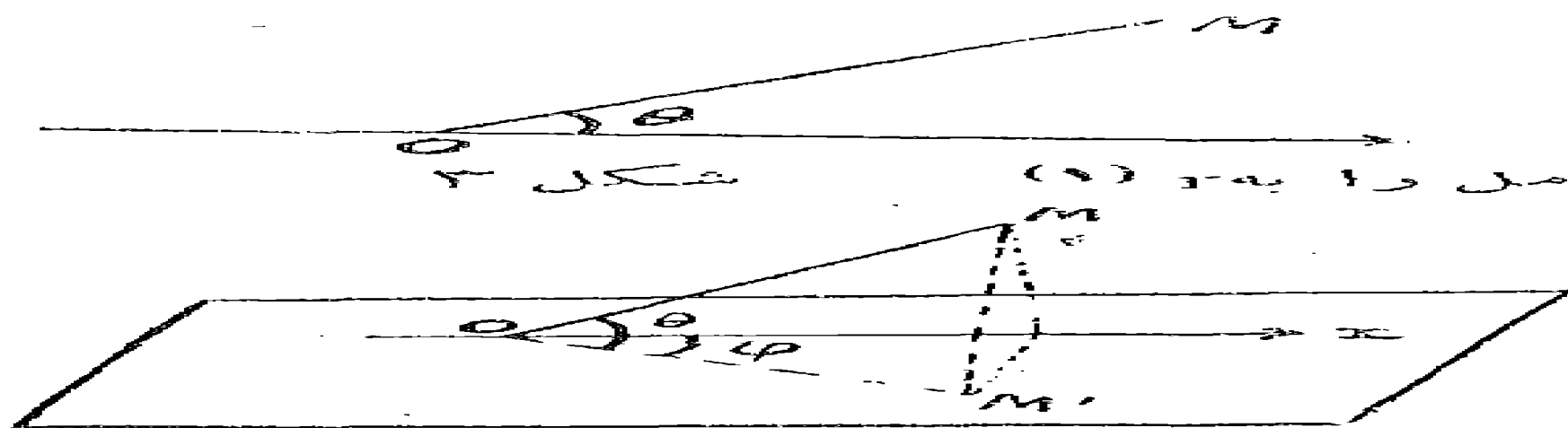
شکل ۲

ارتفاع (بلندی یا Cote) نقطه M میگویند. تصویر - معمولاً - محورهای مختصات را عمود بر هم اختیار

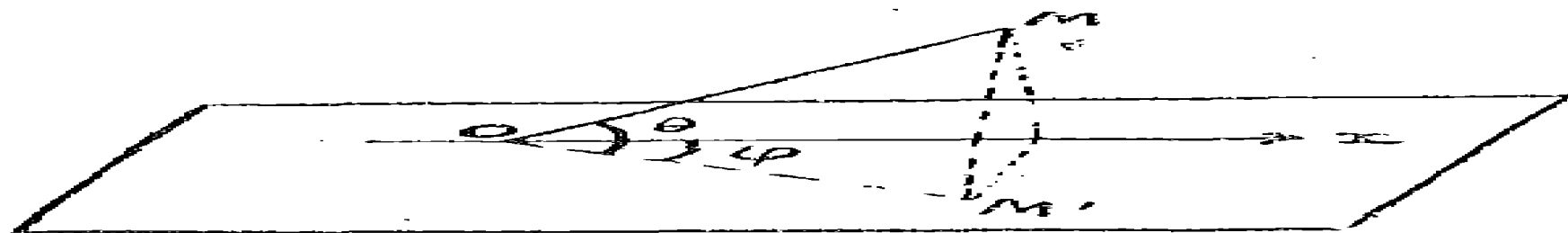
مقاطع Ox, Oy اختیار میکنیم و نقطه M را بموازات Ox بر Oy و بموازات Oy بر Ox تصویر میکنیم تا P و Q بدست آید. OP را طول یا T میگویند و OQ را عرض یا (Ordonnée) نقطه M میگویند.

۲) در فرض - نقطه M را بر هر يك از سه محور متقارب Ox, Oy, Oz به موازات صفحه‌ای كه بر دو محور دیگر میگذرد تصویر میکنیم تا P و Q و R بدست آید (ش ۲) و OP و OQ و OR را به ترتیب طول و عرض و

میکنند و مختصات را قائلیم مینامند .
 ما از این پس فقط از مختصات دکارتی قائم صحت نخواهیم کرد .
 قرار داد شد در خواندن مختصات ابتدا طول ، بعد عرض
 و بعد از آن ارتفاع نقطه را میخوانیم و بهمین ترتیب از چپ
 بر است مینویسیم : $M(x, y, z)$



شکل ۳



شکل ۴

زاویه MOM' را θ و زاویه $M'Ox$ را ϕ مینامیم .
 $OM = r$ و O و P مختصات قطبی نقطه M هستند (ش ۴)

۱۲۷ - پشتگی بین مختصات قطبی و مختصات
 قائم (۱ - ۱) در صفحه - (ش ۵)

(۱) - شعاع حاصل را با حرف یونانی ρ (رو) نمایش میدهند
 و در شکل هم همان حرف نوشته شده ولی چون در چاپخانه T به حرف
 موجود نبود در متن بجای آن r گذاشته شده است

مختصات کروی

$$\begin{cases} OP = x = r \cos \theta \\ OQ = y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \theta \end{cases}$$

۲ - در فضا (ش ۶)

$$\begin{cases} ON' = OM \cos \theta = r \cos \theta \\ \begin{cases} x = OP = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = OQ = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = OR = r \sin \theta \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \varphi \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan \theta \end{cases} \end{cases}$$

۱۳۸ - مختصات کروی -

رجوع شود به قسمت هیت.

۱۳۹ - تغییر محاورهای مختصات - ۱) انتقال

محاورها - هر گاه محاورهای

مختصات Ox و Oy را به موازات

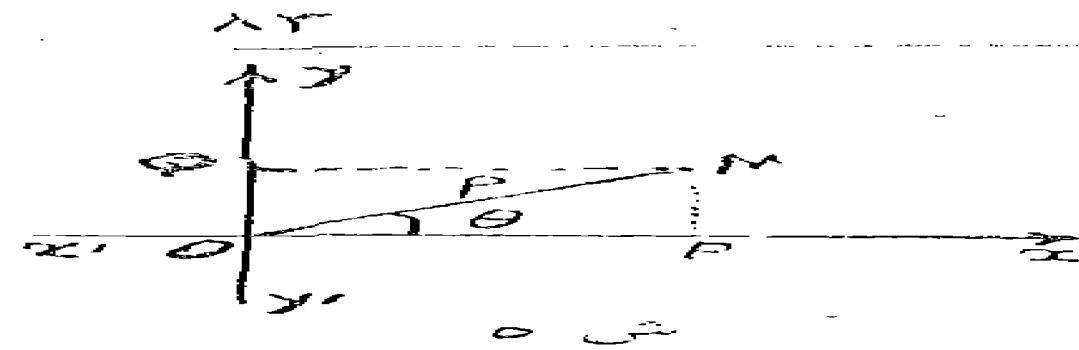
خود حرکت دهیم تا به وضع $O'x'$ و $O'y'$

در آیند (ش ۷) و مختصات نقطه M

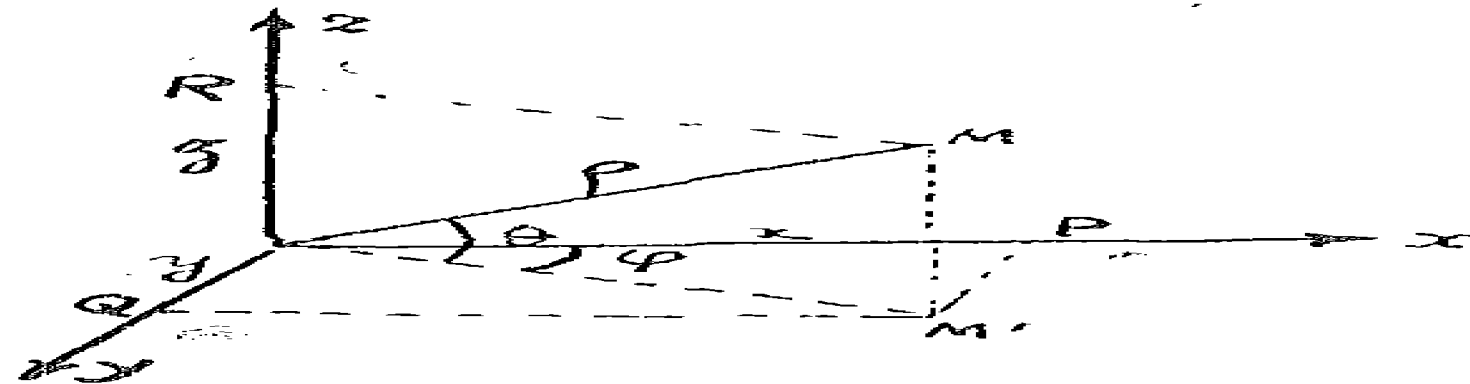
را نسبت به دو محور اول x و y و

نسبت به محاورهای دوم x' و y' انگاشته

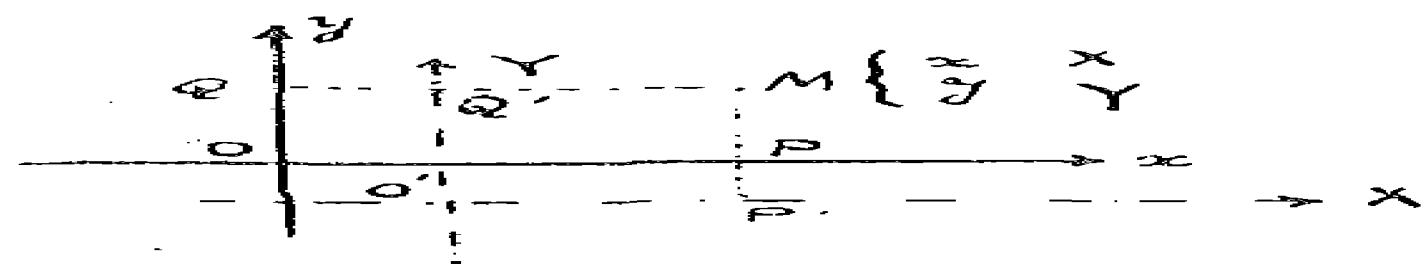
و مختصات نقطه M' را α و β بنامیم



ش ۵



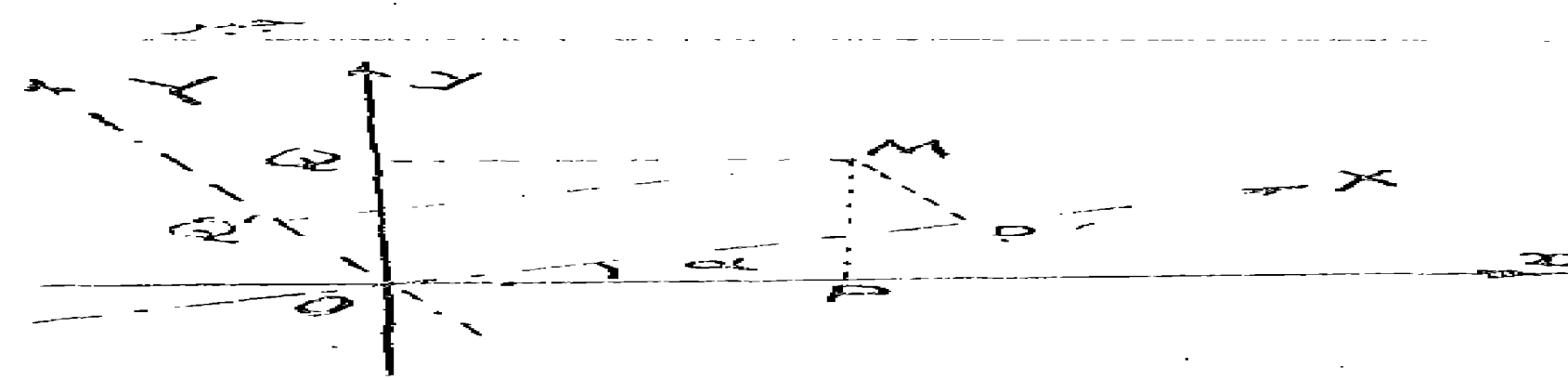
ش ۶



شکل ۷

$$\begin{cases} X' = X \cos \alpha \\ Y' = Y \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} X' = X + \alpha \\ Y' = Y + \beta \end{cases}$$

(۲) دوران محورهاها
اگر محورهاهای Ox و
 Oy بهدای دورانی باندازه
زاویه φ بوضع Ox' و



شکل ۸

Ox' در آیند (ش ۸) و مختصات یک نقطه M را نسبت با اولیها
 x و y و نسبت بدومیها x' و y' بنامیم، از تصویر کردن دایره
چندبر (کثیرالاضلاع) $OPMP$ بر روی محور مقیاسی چنین
خواهیم داشت:

OP' تصویر $P'M + OP$ تصویر $MP' = MP$ تصویر

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}$$

یعنی:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

و
۱-۴- طول قطعه خطی (درازی هر قطعه خط که
بر محوری قرار داشته باشد برابر است با طول منتهای
طول مبدأ آن.
۲- اگر مبدأ قطعه خطی نقطه (x_0, y_0) و
منتهای آن نقطه (x_1, y_1) باشد:

$$AB = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

۱۴۱ - تقسیم نقطه خط به نسبت k

هر گاه نقطه $M(x, y, z)$ قطعه خط AB را که مختصات دو انتهای آن $A(x_0, y_0, z_0)$ و $B(x_1, y_1, z_1)$ باشند به نسبت k تقسیم نماید، یعنی $k = \frac{AM}{MB}$ باشد:

$$M \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{kx_1 + x_0}{k+1} \\ y = \frac{ky_1 + y_0}{k+1} \\ z = \frac{kz_1 + z_0}{k+1} \end{array} \right.$$

۱۴۲ - تبدیل (1) اگر M وسط AB باشد $k=1$ پس مختصات وسط قطعه خط و اسطه عددی مختصات مبدأ و منتهای قطعه اند. (۲) مختصات مرکز ثقل مثلث مساوی مجموع مختصات سه رأس آن است.

۱۴۳ - روابط مهم:

الف - رابطه شال Chasle

۱ - اگر سه نقطه A و B و C بر روی یک محور باشند:

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= 0 \\ \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} \end{aligned}$$

۲ - اگر n نقطه A و B و C و \dots و K و L و \dots بر روی يك محور باشند :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KL} + \vec{LA} = 0$$

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KL} \quad \text{یا}$$

ب - رابطه فیثاغورث

اگر دو نقطه A و B بطولهای a و b بر روی محدودی واقع باشند و M وسط AB باشد (شماره ۴۵)

$$OM^2 = AM^2 = OA \times OB$$

ج - رابطه اوگر

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c بر روی محوری فرض شوند (شماره ۴۶)

$$OA \cdot BC + OB \cdot CA + OC \cdot AB = 0$$

د - رابطه استوارت

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c بر روی محوری فرض شوند (شماره ۴۷)

$$OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$$

ه - اگر نقاط A و B و C و D بطولهای a و b و c و d و e و f محور OX را بر نسبت توافقی تقسیم نموده باشند :

$$1 = (a+b)(c+d) = (a+c)(b+d) = 2$$

۲ - اگر O وسط AB فرض شود : $a = b$ و $c = d$ و $e = f$

$$a^2 = cd$$

۳ — اگر (۸) بردوی ۸ فرض شود :

$$a = \frac{1}{d} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

XXXIII — متغیر و تابع

- ۱۴۴ — هر چیز تغییر پذیر را متغیر گویند .
- ۱۴۵ — تابع : اگر ما بین دو متغیر رابطه ای موجود باشد بطوریکه تغییر یکی بستگی بتغییر دیگری داشته باشد دومی را متغیر اصلی و اولی را متغیر تابع یا تابع میگویند . در بیان رابطه دو متغیر هر یک را میتوان بدون تفاوت تابع دیگری دانست .
- ۱۴۶ — تابع با اینصورت نمایش داده میشود : $y = f(x)$.
 اگر در تابع (u) ، $y = f(u)$ ، u خودش تابعی از x باشد ، را تابع تابع x نامند .
- ۱۴۷ — تابع همبسته آنست که بازنه جمیع مقادیر یک به متغیر داده شوند دارای مقدار معینی باشد (یعنی موهوم یا مجهول نباشد)
- ۱۴۸ — تابع انفصالی : تابع $y = f(x)$ را بازنه a انفصالی گویند بشرط آنکه $f(a) = y$ مقداری معین باشد .
- ۱۴۹ — تابع انفصالی : تابع $y = f(x)$ را

بازاء $x = a$ انفصالی گویند اگر $f(a)$ مقدار معینی نباشد .
 توضیح - توابع معین همیشه انفصالی هستند و توابع نامعین بازاء مقادیری از متغیر که تابع نامعین است انفصالی میباشند .

۱۵۰ - تابع صعودی - تابع را صعودی گویند اگر تابع و متغیر با هم بالا و پائین بروند . مثلاً قیمت پارچه تابع صعودی طول آنست .

۱۵۱ - تابع نزولی - تابع را نزولی گویند وقتی که جهت تغییرات تابع و متغیر مخالف باشد مثلاً مدت لازم برای ساختمان یک بنا تابع نزولی تعداد کارگران است که بکار گمارده میشوند .

۱۵۲ - تابع را متناوب گویند اگر بازاء مقادیر متعددی از متغیر که تفاضل هر دو مقادیر متوالی آنها مقدار ثابتی باشد تابع یک مقدار را از نماید این تفاضل ثابت را دوره تناوب گویند .
 مثلاً $y = \sin x$ تابع متناوبی است که 2π دوره تناوب آنست .

XXIV - حدود

۱۵۳ - هرگاه متغیری حین تغییر بعدد معینی نزدیک شده ولی هیچگاه مساوی آن نگردد آن عدد را حد متغیر گویند . اگر متغیر از حد کوچکتر باشد حد را فوقانی و اگر نه تحتانی نامند .
 مثال : محیط دایره حد فوقانی محیط کثیر الاضلاع محیطی و حد تحتانی محیط کثیر الاضلاع محیطی است وقتی عدد اضلاع آنها

بی نهایت زیاد شود. عبارت دیگر عدد m حد متغیر x است در صورتیکه قدر مطلق $(m - x)$ از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر شود و وقتی که x بینهایت به m نزدیک گردد.

۱۵۴ - خواص حدود

- ۱ - حد مجموع جبری چند تابع از متغیر x وقتی که x به سمت حدی میل نماید، مساوی است با مجموع حدود آنها.
- ۲ - حد حاصل ضرب چند تابع از متغیر x وقتی که x به سمت حدی میل نماید، مساوی است با حاصل ضرب حدود آنها.
- ۳ - حد خارج قسمت دو تابع از متغیر x وقتی که x به سمت حدی میل نماید، مساوی است با خارج قسمت حدود آنها بشرط آنکه حد تابع مقسوم علیه مخالف صفر باشد.
- ۴ - حد n ام (یا ریشه n ام) یک تابع مساوی است با n ام (یا ریشه n ام) حد آن تابع.
- ۵ - حد کثیر الجملة صحیحی از x بازا x به سمت ∞ میل نماید، و علامتش علامت جمله ایست که بزرگترین نماینده را دارا باشد.

۷- رفع ابهام

- ۱۵۵ - تعریف - اگر تابعی بازا مقدار معینی از متغیر بزرگی از صورت نهایی ∞ ، ∞ یا 0 میل نماید (در ∞ یا 0) در آید گویند تابع بازا ∞ مقدار مبهم است و پیدا کردن مقدار حقیقی تابع را بازا ∞ مقدار رفع ابهام گویند.
- ۱۵۶ - رفع ابهام-۱) صورت $\frac{0}{0}$ در موقعی پیدا می

شود که صورت و مخارج تابع $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ را دارای ریشه مشترک a باشند، و برای رفع ابهام باید عامل مشترك $a - x$ را هر چند دفعه که ممکن باشد از صورت و مخارج حذف نمود.

(۲) $(-\infty, \infty)$ را میتوان بصورت $\frac{1}{x}$ یا $\frac{1}{x^2}$ نوشت.

(۳) $(-\infty, \infty)$ را میتوان بصورت $\frac{1}{x}$ یا $\frac{1}{x^2}$ نوشت.

(۴) صورت $(-\infty, \infty)$ اگر در تابع $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ باشد $f(a) = \infty$ و $\varphi(a) = 0$ یا $f(a) = 0$ و $\varphi(a) = \infty$ ضرب میکنیم تا بصورت $\frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)}$ درآید بعد صورت و مخارج را بر $\varphi^2(x)$ تقسیم می نماییم تا بشود:

$$\frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)}$$

این کسر باقاعده $x = a$ مساوی $\frac{0}{0}$ است.

۱۵۷ — نتیجه — مقدار حقیقی کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ در بازه

- ۱ — اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ،
 $\infty \pm$ است .
- ۲ — اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد
 مساوی است با خارج قسمت ضرایب جملی که دارای بزرگترین
 نما هستند .
- ۳ — اگر درجه صورت از مخرج کوچکتر باشد مساوی
 صفر است .

۷۱ - مشتقات

- ۱۵۸ — تعریف - اگر متغیر x از مقدار x_0 تا مقدار
 x_1 تغییر کند میگویند بازه $(x_0 - x_1)$ نمو کرده است
 و این نمو را با علامت Δx نشان میدهند .
 در تابع (x) بازاء هر نمو Δx تابع نموی مانند
 Δy خواهد داشت .
- ۱۵۹ — تعریف - مشتق تابع (x) عبارتست
 از حد $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی که میل کند به صفر .
 مشتق تابع (x) را به y' یا $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{d}{dx}$ نمایش
 میدهند .
- ۱۶۰ — مشتقات متوالی به چون مشتق هر تابع خود
 تابعی از متغیر میباشد ممکن است از آنهم مشتق گرفت . این

مشتق را مشتق دوم تابع اصلی گویند . به همین طریق ممکن است مشتق سوم و چهارم و . . . و n ام گرفت .

۱۶۱ — مشتق تابع تابع — در تابع تابع (u) که $y = \varphi(x)$ ممکن است مشتق y را بر حسب u یا بر حسب x بدست آورد و بین آنها این رابطه برقرار است :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot u'_x$$

۱۶۲ — محاسبه مشتق و خواص آن

۱ — مشتق مقادیر ثابت صفر است .

۲ — مشتق مجموع چند تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u + v = w \\ y' = u' + v' = w' \end{array} \right.$$

۳ — مشتق حاصلضرب چند تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u \cdot v \\ y' = uv' + vu' \\ y = u \cdot v \cdot w \\ y' = u'vw + v'uw + w'uv \end{array} \right.$$

۴ — مشتق خارج قسمت دو تابع :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{u}{v} \\ y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \end{array} \right.$$

۵ — مشتق قوه n ام يك تابع

$$\left\{ \begin{aligned} y &= u^m \\ y' &= mu u^{m-1} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= m \sqrt[m]{u^m} \\ y' &= \frac{m}{m} u \times \frac{1}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}} \end{aligned} \right. \quad \text{۶ - مشتق ریشه m ام یات تابع}$$

۱۶۳ - مشتق توابع متداول

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &- y = c \\ 1 &- y = x \\ \frac{1}{2} &- y = x^2 \\ \frac{1}{3} &- y = x^3 \\ \frac{1}{4} &- y = x^4 \\ 0 &- y = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2} &- y = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{2} &- y = \sqrt{x} \\ \frac{1}{2} &- y = \sqrt[3]{x} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= 0 \\ y' &= 1 \\ y' &= mx^{m-1} \\ y' &= amx^{m-1} \\ y' &= -\frac{1}{x^2} \\ y' &= -\frac{am}{x^{m+1}} \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y' &= \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}} \end{aligned} \right.$$

مشتق توابع مستدیره :

$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$y = \sin^2 x$	$y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$
$y = \cos^2 x$	$y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$
$y = \sin(mx + a)$	$y' = m \cos(mx + a)$
$y = \cos(mx + a)$	$y' = -m \sin(mx + a)$
$y = \operatorname{tg}(mx + a)$	$y' = \frac{m}{\cos^2(mx + a)}$
$y = \operatorname{ctg}(mx + a)$	$y' = -\frac{m}{\sin^2(mx + a)}$
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$۲۴ - y = \arctg x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$۲۵ - y = \operatorname{arccotg} x$$

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

خواص مشتق

۱۶۴ - مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است .

۱۶۵ - مشتق تابع بازاء طول نقاط ماکزیمم و مینیمم صفر است .

۱۶۶ - طول نقطه عطف منحنی نمایش تابع ریشه مشتق ثانی آن تابع است .

رفع ابهام دوسیمانه مشتق

$$۱۶۷ - \text{اگر در کسر } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ به } f(a) = 0 \text{ و } \varphi(a) = 0$$

باشد مقدار حقیقی آن مساوی است با مقدار حقیقی خارج قسمت

مشتقات صورت و مخارج کسر بازاء $x = a$

مثال - مقدار حقیقی کسر

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^4 - 9x^2 + 7x + 2}{x^4 - 12x^2 + 10x + 3}$$

را بازاء $x = ۱$ باید تعیین کرد.

حل - از $f(x)$ و $\varphi(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{4x^3 - 18x + 7}{4x^3 - 24x + 10}$$

چون این کسر هم بازا ۱ مساوی $\frac{1}{2}$ است باردیگر

از $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ مشتق بگیریم :

$$\frac{18}{24} = \frac{30}{48} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

مقدار این کسر نیز بازا ۱ مساوی $\frac{1}{2}$ است، باردیگر از

$\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ مشتق بگیریم

$$\frac{30}{48} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

مقدار این کسر بازا ۱ مساوی $\frac{1}{4}$ است بنا براین

مقدار حقیقی $\frac{1}{2}$ بازا ۱ مساوی $\frac{1}{4}$ است .

XVII - تغییرات توابع

۱۶۸ - تعریف - مقصود از تعیین تغییرات تابع

$f(x)$ // تحقیق درجهت تغییرات آن تابع است بازااء مقادیر مختلف x و قتی که x از a تا b تغییر کند، یعنی تعیین آنکه تابع درجه فواصل صعودی و درجه فواصل نزولی است و بازاا چه مقادیری از x ماکزیمم یا مینیمم یا مساوی صفر میباشد.

۱۶۹ - تغییرات تابع درجه اول $y = ax + b$

وقتی x از a تا b تغییر نماید تغییرات تابع //

بستگی به علامت a دارد، اگر a مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است.

	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
y	$a > 0$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
	$a < 0$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty$

ماکزیمم و می نیمم

۱۷۰ - تعریف - اگر تابع (x) بازاء $x = a$ اتصال بوده و بازاء $x = a - \varepsilon$ مقدار یست مثبت و بی نهایت (کوچک) صعودی و بازاء $x = a + \varepsilon$ نزولی باشد میگویند تابع بازاء $x = a$ ماکزیمم است ؛ و هرگاه تابع بازاء $x = a$ نزولی و بازاء $x = a - \varepsilon$ صعودی باشد گویند تابع بازاء $x = a$ می نیمم میباشد .

۱۷۱ - تعیین ماکزیمم و می نیمم دو سیله مشتق - برای بدست آوردن ماکزیمم و می نیمم تابعی مشتق آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جواب های آنرا بجای x در تابع میگذاریم . مقداری که برای بدست می آید ماکزیمم است هرگاه تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد و می نیمم است هرگاه تابع پیش از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد (شماره ۱۶۵)

۱۷۲ - طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیمم و می نیمم بعضی توابع - ممکنست بدون استعمال مشتق در بعضی از توابع مقدار ماکزیمم یا می نیمم را مستقیما بدست آورد . این امر در مواردی ممکنست که هرگاه تابع (x) را بر حسب قوای نزولی x مرتب نمائیم و در پارامتر فرض کنیم بتوان برای مبادله اخیر ریشه مضاعف بدست آورد ؛ در اینصورت مقادیری

از پارامتر x که بازاء آنها معادله ریشه مضاعف پیدا کند ما کزیمم یا می نیمم تابع هستند .

مثال - تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ را نسبت به x مرتب می کنیم .

$(y+1)(x+3)(x+1) = x^2 + 2x - 3$ معادله (۱) بازاء

$(y-1)(x+1)(x-3) = 0$ ریشه مضاعف دارد و $y_1 = -1$ و $y_2 = 2$ ریشه های معادله (۲) ما کزیمم و می نیمم تابع مذکور میباشند .

۹۷۳ - ما کزیمم و می نیمم مطلق

۱ - اگر حاصل جمع چند عدد مثبت ثابت باشد حاصل ضرب آنها وقتی ما کزیمم است که همه آن اعداد باهم مساوی باشند .
ب - اگر حاصل ضرب چند عدد مثبت ثابت باشد مجموع آنها موقعی می نیمم است که همه آنها باهم مساوی باشند .

۹۷۴ - تغییرات تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ نوشت (شماره ۷۲)

حال چون x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق تغییرات y بستگی به تغییرات $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ و جهت تغییرات آن بستگی

بعلامت a دارد. این تغییرات را میتوان در جدول ذیل (که در آن $M = \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a}$ فرض شده است) خلاصه کرد:

x	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{b}{2a}$	\nearrow	$+\infty$
$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	\nearrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$(x + \frac{b}{2a})^2$	$+\infty$	\searrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$(x + \frac{b}{2a})^2 + M$	$+\infty$	\searrow	$\frac{M}{a}$	\nearrow	$+\infty$
$y \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$	$+\infty$	\searrow	M مینیم	\nearrow	$+\infty$
	$-\infty$	\nearrow	M ماکزیمم	\searrow	$-\infty$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ باشد x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در دو طرف $-\frac{b}{2a}$ قرار داشته y بازاء آنها تابع صفر است.

۱۷۵ - تغییرات تابع دومجدوری $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a} \right]$ نوشت و تغییرات آن وقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند در جدول ذیل خلاصه میشود: $\left(M = \frac{\Delta ac - b^2}{\Delta a} \right)$:

x	$-\infty \sqrt{-\frac{-b}{a}} \cdot \sqrt{1 + \frac{-b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{-b}{a^2}}$
-----	--

$\left(a + \frac{b}{a}\right)$	$\left\{ \begin{array}{l} b < +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \\ b > +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \end{array} \right.$
--------------------------------	---

$a >$	$\left\{ \begin{array}{l} b > +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \\ b < +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \end{array} \right.$
-------	---

$a <$	$\left\{ \begin{array}{l} b > +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \\ b < +\infty \sqrt{\frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \end{array} \right.$
-------	---

در صورتیکه $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ باشند چهار

ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در دو طرف $\pm \sqrt{\frac{b}{2a}}$ قرار می گیرند و تابع بازاء آنها صفر است. هرگاه $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ باشند دو ریشه معادله یکی طرف چپ $-\sqrt{\frac{b}{2a}}$

و دیگری طرف راست $+\sqrt{\frac{b}{2a}}$ قرار می گیرند.

xxviii - نمایش هندسی توابع

۱۷۶ - **تعیین** - در تابع $y = f(x)$ هر مقدار x مقداری برای y پیدا میشود. چون این دو مقدار را مختصات نقطه ای مانند M فرض کنیم نسبت بدو محور عمود OM' و Oy' وضع آن نقطه را میتوان مشخص کرد. چون x و در نتیجه y تغییر کنند M در صفحه تغییر جا میدهد و از حرکت آن یک منحنی پدید می آید. این منحنی را منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ میگویند.

پس هر نقطه که بر منحنی باشد مختصاتش در رابطه $y = f(x)$ صدق میکند و هر نقطه که مختصاتش در آن رابطه صدق کند بر روی منحنی است.

تعیین - منحنی مکان هندسی نقاطی است که بر حسب قاعده معینی، در صفحه یا در فضا، تغییر مکان دهند.

نمایش تغییرات تابع درجه اول $ax + by + c = 0$

۱۷۷ - قضیه - منحنی نمایش تغییرات تابع درجه اول

خطی است مستقیم .

۱۷۸ - قضیه - مختصات نقاط هر خط مستقیم در معادله

درجه اول $ax + by + c = 0$ صدق میکند .

۱۷۹ - قضیه - در هر سه جمله درجه اول $ax + by + c = 0$:

اولا : ۱) هرگاه $a = 0$ باشد ، $ax + by + c = 0$ یا

$y = -\frac{c}{b}$. منحنی نمایش y خطی است موازی محور x ها .

ب) معادله هر خط که موازی محور x ها باشد $y = c$ است ،

ثانیا : ۱) هرگاه $b = 0$ باشد ، $ax + by + c = 0$. منحنی

نمایش x خطی است موازی محور y ها .

ب) معادله هر خط موازی محور y ها $x = c$ است .

ثالثا : ۱) اگر $c = 0$ باشد $y = -\frac{a}{b}x$ ؛ منحنی خطی

است که بر O ، مبدأ مختصات ، میگذرد .

ب) (معادله هر خط که بر مبدأ مختصات بگذرد

$ax + by = 0$ است .

رایها : اگر a و b و c مخالف صفر باشند خط محورها

را در دو نقطه قطع میکند و معادله آن بصورت $ax + by = n$:

است . در اینصورت m ضریب زاویه ای و n عرضی از مبدأ

خط است .

۱۸۰ - ضریب زاویه ای هر خط تاوانت زاویه ایست

که این خط باجهت مثبت محور x ها تشکیل میدهد . پس ضریب

نمایش هندسی توانیم

۱۰۳

زاویه‌ای خطوط موازی محور m ها صفر و از آن خطوط موازی محور m ها است.

۱۸۱ - زاویه دو خط - اگر m و m' ضریب زاویه ای دو خط \triangle و \triangle' و α زاویه بین آنها باشد :

$$\alpha = \frac{m - m'}{1 - mm'}$$

دو خط موازی : اگر $\alpha = 0$ باشد $m = m'$ یعنی ضرایب زاویه‌های دو خط موازی مساویند.

دو خط عمود بر هم : اگر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد $\alpha = 0$ یا $\alpha = \frac{\pi}{2}$

یعنی $m = m'$ پس $\frac{1}{m} = m'$ یعنی اگر خطی بر خط دیگر عمود باشد ضریب زاویه ایش مساوی عکس ضریب زاویه دیگر است یا علامت مخالف.

۱۸۲ - معادله خطی که بر یک نقطه می‌گذرد - معادله خط \triangle که با ضریب زاویه ای m بر نقطه $M(x', y')$ می‌گذرد :

$$(y - y') = m(x - x')$$

۱۸۳ - معادله خطی که بر دو نقطه می‌گذرد - اگر مختصات دو نقطه را بترتیب (x', y') و (x'', y'') فرض کنیم

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

ملاقات مختصی - معادله خطی که از نقاط $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ بگذرد :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a و b را بترتیب طول و عرض از مبدأ خط گویند.

۱۸۴ - فاصله نقطه از خط - فاصله نقطه $M(x', y')$ از خطی که معادله اش $ax + by + c = 0$ میباشد عبارتست از :

$$d = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۸۵ - رسم خط - برای رسم يك خط کافی است مختصات دو نقطه آنرا بدست آوریم . بهتر این است كه طول یکی از این نقاط و عرض دیگری را صفر انگاشته عرض آن و طول این را از روی معادله خط بدست آوریم .

۱۸۶ - فصل مشترك دو خط - مختصات فصل مشترك دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ جوا بهای دستگاه :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

میباشند، یعنی

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab - ba'} \quad \text{و} \quad y = \frac{ca - ac'}{ab' - ba}$$

مجاذبهها

۱۸۷ - تهر یغی - اگر نقطه M بتواند در روی يك منحنی بی نهایت دور شود میگویند این منحنی يك شاخه بی نهایت دارد .

۱۸۸ - مجاذب - هر گاه خطی مانند \triangle بتوان یافت كه فاصله نقطه M منحنی از آن ، وقتی كه M بی نهایت در

روی منحنی دور شود ، بسمت صفر میل کند ، خط \triangle را مجانب منحنی گویند .

یعبارت دیگر مجانب خطی است که در بی نهایت بر منحنی مماس شود .

مجا نيب بر سه قسم است : افقی یا موازی محور x ها ، قائم یا موازی محور y ها ، مایل .

۱۸۹ — مجانب افقی — هر گاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که x بی نهایت بزرگ شود y بسمت مقدار ثابت a میل کند خط $y = a$ را مجانب افقی منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ گویند .

۱۹۰ — مجانب قائم — هر گاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که y بی نهایت بزرگ شود x بسمت مقدار ثابت b میل کند خط $x = b$ را مجانب قائم منحنی است .

۱۹۱ — مجانب مایل — اگر خط $y = mx + n$ مجانب مایل منحنی $y = f(x)$ باشد :

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ است وقتی که x میل کند بسمت بی نهایت

$\lim_{x \rightarrow \infty} y - mx$ است وقتی که y میل کند بسمت بی نهایت

۱۹۲ — قاعده عملی برای پیدا کردن مجانبها

(۱) منحنیها ئیکه معادله آنها خطی است ، یعنی کسری یا اصم نیست ، مجانب ندارند .

(ب) در تابع کسری $y = \frac{f(x)}{\phi(x)}$ برای تعیین مجانبها

باینطریق باید عمل کرد :

۱ — معجانب قائم : معادله آنها ریشه های $\varphi(x) = 0$ است .

۲ — معجانب افقی : معادله آنها حدکسر $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ است

وقتی x میل کند بسوی بی نهایت (شماره ۱۵۶) .

۳ — معجانب مایل : خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ معادله معجانب مایل است .

توضیح — اگر درجه $\varphi(x)$ از $f(x)$ زیادتر یا T است

مساوی باشد منحنی معجانب مایل ندارد . اگر درجه $f(x)$

از $\varphi(x)$ یکی بیشتر باشد معجانب خطی مستقیم است . هرگاه

اختلاف درجات بیش از یکی باشد معجانب منحنی است .

در معادلات اصم (غیر کسری) معجانب موازی (قائم و افقی)

نیست و معادله معجانب مایل پس از تعیین m حد $\frac{f}{x}$ و $mx + n$ است

وقتی x میل کند بسوی بی نهایت بدست میآید .

تقعر و تحدب

۱۹۳ — تقعر و تحدب — اگر مماس مرسوم در نقطه

M بر منحنی ، منحنی را در همان نقطه قطع نکند میگویند

منحنی در این نقطه محدب (یا مقعر) است . بر حسب

T آنکه منحنی در مجاورت M بالا یا پایین مماس باشد

میگویند تقعر منحنی بطرف بره های مثبت یا منفی است و بر

حسب T آنکه بر است یا برعکس مماس باشد تقعر منحنی بطرفه

x های مثبت یا منفی است .

۱۹۴ — نقطه عطف — اگر مماس در M بر منحنی ،

منحنی را در همان نقطه قطع کند، منحنی در آن نقطه تغییر جهت نقعر داده است. M' را نقطه عطف منحنی میگویند.

۱۹۵ - قضیه - مشتق دوم هر تابع بازاء طول نقاطی که نقعر منحنی نمایش آن تابع بطرف برهای مثبت است مثبت و بازاء طول نقاطی از منحنی که نقعر آن بطرف برهای منفی است منفی میباشد.

نتیجه - در نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر است.

تقارن

۱۹۶ - محور تقارن - خط Δ را محور تقارن يك منحنی گویند در صورتیکه اگر خطی بر هر نقطه غیر مشخص N از Δ عمود گردد و منحنی را در M' و M قطع کند، N وسط MM' باشد.

مرکز تقارن - نقطه (α, β) را مرکز تقارن منحنی گویند در صورتیکه اگر هر خط غیر مشخص که بر A بگذرد و منحنی را در دو نقطه M' و M'' قطع کند، A وسط $M'M''$ باشد.

۱۹۷ - تعریف محور تقارن - برای آنکه بدانیم منحنی نمایش $(x) = y$ محور تقارن دارد یا نه، و اگر دارد برای بدست آوردن معادله آن، خط Δ بمعادله $n - x = mx$ را (که در آن باید پارامترهای m و n را مشخص ساخت) فرض میکنیم و نقطه $(n - mx, x)$ را بر آن اختیار میکنیم و از آن خط $(x - \alpha) = \frac{1}{m}(n - mx)$ را بر Δ

عمود کرده M_1' و M_1'' فصل مشترک‌های T را با منحنی $y = f(x)$ بدست می آوریم - اگر (x', y') و (x'', y'') مختصات M_1' و M_1'' باشند و \triangle محور تقارن باشد چنین خواهیم داشت :

$$(1) \quad \frac{y' - y''}{2} = \alpha \quad (2) \quad \frac{y' + y''}{2} = m\alpha + n$$

روابط (۱) و (۲) نباید بستگی به α داشته باشند ، پس هرگاه T آنها را بر حسب α مرتب کنیم باید در هر یک ضریب α و جمله مستقل از α مساوی صفر شوند . باین ترتیب مقادیری برای m و n بدست می آید . اگر مقادیری که از روابط (۱) و (۲) بدست آمده اند با هم مساوی باشند \triangle محور تقارن است ، وگرنه نیست .

۱۹۸ - تعیین مرکز تقارن - برای تعیین آنکه منحنی $(x) y = f(x)$ مرکز تقارن دارد نقطه $M(\alpha, \beta)$ را، که در آن α و β بعداً تعیین خواهند شد، اختیار می کنیم و خط $y - \beta = m(x - \alpha)$ را بر آن مرور داده محل برخورد آن را با $y = f(x)$ بدست می آوریم . اگر $A(x', y')$ و $B(x'', y'')$ نقاط تقاطع و M مرکز تقارن باشند :

$$(1) \quad \frac{y' + y''}{2} = \beta \quad (2) \quad \frac{y' - y''}{2} = \alpha$$

روابط (۱) و (۲) باید از m مستقل باشند پس بسایند ضرایب قوای مختلفه m در آنها مساوی صفر شوند . از بیان این شرط در رابطه (۱) برای α و β مقادیری بدست می آید، اگر این

مقادیر ضرایب قوای مختلفه m را در رابطه (۲) نیز صفر کنند. منحنی مرکز تقارن دارد و مقادیری که برای α و β بدست آمده اند مختصات این مرکزند.

۱۹۹ - قضیه - اگر يك منحنی دو محور تقارن عمود برهم داشته باشد محل تقاطع آنها مرکز تقارن منحنی است.

مماس بر منحنی

۲۰۰ - مماس - اگر خطی منحنی $(x, y = f(x))$ را در M' و M'' قطع کند سپس در حول M' نقطه بچرخد که M'' بی نهایت به M' نزدیک شود حد خط را مماس بر منحنی در نقطه M' گویند.

۲۰۱ - ضریب زاویه ای مماس بر منحنی $(f, x) = y$ در نقطه ای بطول a عبارتست از مقدار مشتق $f'(x) = f'(a)$ یا از $x = a$.

۲۰۲ - رسم مماس بر منحنی $y = f(x)$

(۱) معادله مماس بر منحنی که بر نقطه M بطول a واقع بر منحنی می گذرد عبارتست از $x = a$ $y = f(a) = f'(a)$

(۲) معادله مماسی که از نقطه (α, β) واقع در خارج منحنی بر منحنی رسم شود بدو قاعده بدست می آید.

قاعده اول: تعیین ضریب زاویه ای مماس — معادله کلی خطوطی را که بر (α, β) M می گذرند می نویسیم:

$(x - \alpha) = m(\beta - y)$ T انگاه آن را با معادله منحنی $y = f(x)$ حل می کنیم؛ شرط آنکه خط بر منحنی مماس باشد اینست که:

دستگاه يك ریشه مضاعف داشته باشد. مقداری از m «كه» بازار آنت ریشه مضاعف بدست میآید. ضریب زاویه‌ای تماس است.

قاعده دوم - تعیین طول نقطه تماس - معادله کلی تماس بر نقطه‌ای از منحنی به دست آمده از $[a, f(a)]$ را می‌نویسیم:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بعد بجای x و y مقادیر a و β را می‌گذاریم و a یعنی طول نقطه تماس را بدست می‌آوریم.

رسم منحنی

۳-۲ - برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ یا بنظر یک عمل می‌کنیم:

(۱) ریشه‌های $f(x) = 0$ را بدست می‌آوریم. (۲) مقدار y را با $y = \pm \infty$ معین می‌کنیم.

(۳) معادلات مجانبها را تعیین می‌نمائیم (۴) بوسیله مشتق طول و عرض نقاط ما گزینیم و می‌توانیم را معلوم می‌کنیم.

(۵) با مشتق درم طول نقطه عطف را معین می‌کنیم.

(۶) جدول نمایش تغییرات را ترتیب می‌دهیم. (۷) نسبت بدو محور متعامد نخست مجانبها را می‌سازیم و بعد بكمك نقاطی كه در جدول تغییرات ثبت شده اند و با مراعات جهت تغییرات

منحنی را رسم می‌کنیم. اینك چند مثال:

مثال ۹ - رسم منحنی تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ گرافيك

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad , \quad x = -1 \quad , \quad y = 0$$

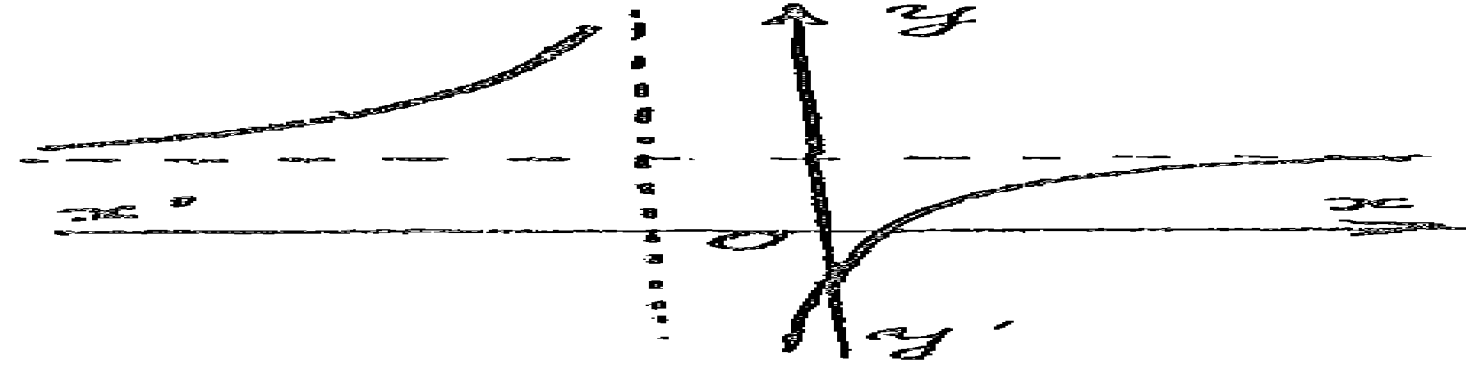
ماکزیم و می نیمم

$$x = \infty, \quad y = 2$$

$$x = -1, \quad y = \infty$$

همیشه مثبت است $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	∞
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	2	∞	1	0	1	2



مثال ۲

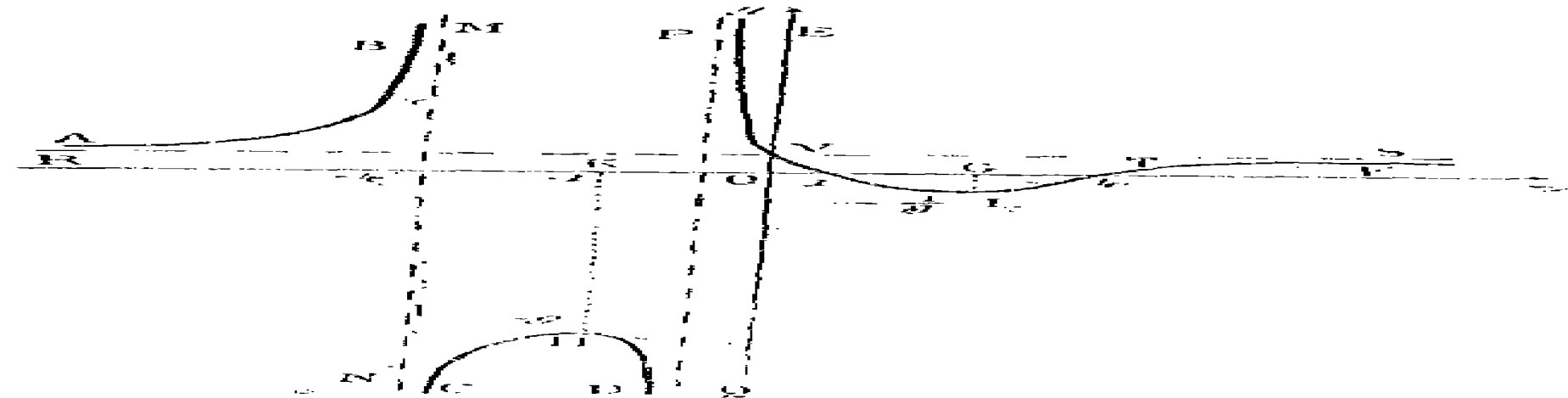
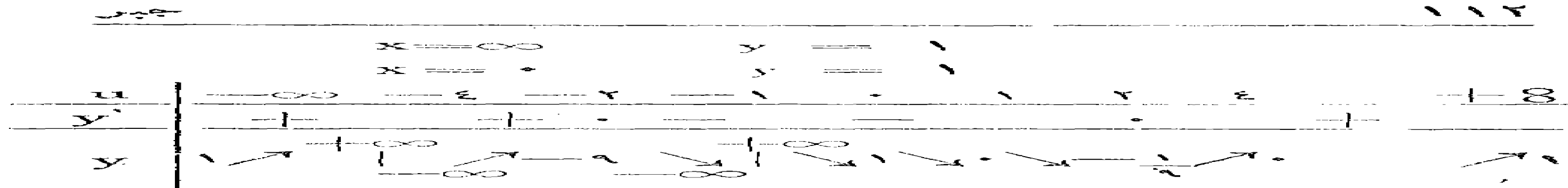
تغییرات تابع

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$$

$$y' = \frac{2x(x-5)}{(x^2+5x+4)^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$y = 0 \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 5$$

$$y = \infty \quad x = -4 \quad \text{و} \quad x = -1$$



مثالی ۳ - محلول و دست رسم منحنی $y = \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x}$ وقتی:

$$-a < x < a$$

$$y = \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\varepsilon \cos^3 x}{\gamma \cos^2 x} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \cos x$$

$$y' = \frac{-\sin x (2 \cos^2 x - 1 - 3)}{2 \cos^2 x}$$

$$y' = 0 \text{ , } \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

$$y' = \infty \text{ , } \cos x = 0$$

$$x = 90^\circ, 270^\circ$$

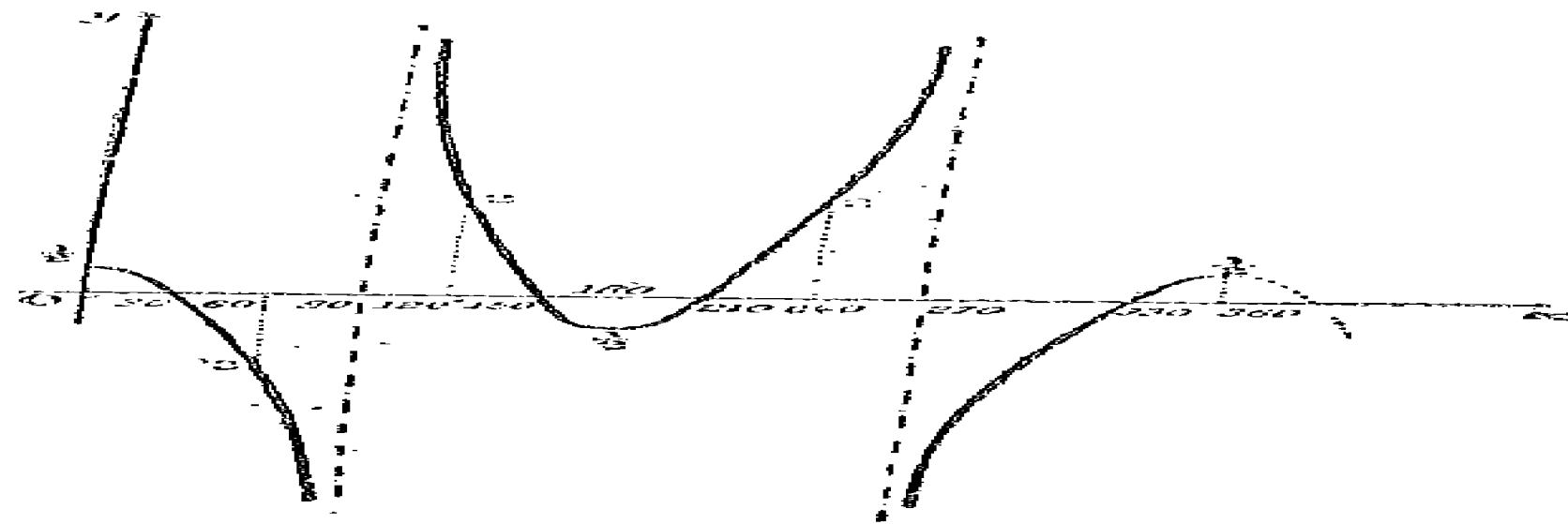
$$x = 0^\circ \text{ , } y = 1$$

$$y' = 0 \text{ , } \sin x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0^\circ \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 180^\circ \\ y = -1 \end{array} \right.$$

$$y' \geq 0 \quad 180^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y'	0	-	-	-	0	+	+	+	0
y	1	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow

حال اگر منحنی تغییرات فوق را رسم کنیم شکل ۱۱ بدست میآید



شکل ۱۱

XXXX حل معادلات بوسیله رسم منحنی

۲۰۴ - حل معادله $f(x) = 0$ هرگاه جواب های معادله $f(x)$ بر راهبانی که در حدود اطلاع مسا هستند بدست نیایند میتوان منحنی نمایش تغییرات $f(x)$ را با دقت هرچه بیشتر رسم کرد؛ طول نقاط تلاقی این منحنی با محور x ها جوابهای تقریبی معادله اند.

۲۰۵ - حل دستگاه دو معادله $f(x, y) = 0$ و $\varphi(x, y) = 0$

در هر يك از معادلات // را بر حسب y بدست میآوریم:
 $f_1(x, y) = 0$ و $f_2(x, y) = 0$ ؟ آنگاه منحنی دو تابع اخیر را با دقت
 تمام رسم میکنیم ؟ مختصات نقاط برخورد منحنیها جواب های
 دستگاه بدست میآید.

۲۰۶ — بحث در وجود و علامت ریشه های
 معادله پارامتری $f(x, y) = 0$

از رابطه $f(x, y) = 0$ پارامتر m را بر حسب x بدست
 میآوریم ؟ $f(x, m) = 0$ ، سپس منحنی تغییرات (x, m) ، $m = f(x)$
 را رسم میکنیم (بجای // فرض میشود) و نیز خط $m = 0$
 را وقتی m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم میکنیم ، بر
 حسب آنکه خط منحنی را قطع نکند یا بکند یا بر آن مماس
 شود معادله دارای جواب نیست یا هست یا جواب مضاعف
 دارد .

۲۰۷ — حل نامعادلات یوسيله منحنی

۲۰۷ — منحنی نمایش $f(x, y) = 0$ صفحه را بدو ناحیه
 تقسیم میکند . مختصات هر نقطه واقع بر منحنی در رابطه
 $f(x, y) = 0$ صادق است و مختصات هر نقطه غیر واقع بر منحنی در
 یکی از دو رابطه $f(x, y) > 0$ یا $f(x, y) < 0$ صدق می
 کنند . مختصات جميع نقاط واقع در یکی از دو ناحیه صفحه در
 یکی از دو رابطه اخیر و جميع نقاط واقع در ناحیه دیگر در
 رابطه دیگر صادق میباشد .

۲۰۸ — حل نامعادله $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ — نخست (x, y, z) را مساوی صفر انگاشته (x, y, z) را بوسیله آن بدست میآوریم و منحنی آنرا میکشیم، آنگاه مختصات یا نقطه M واقع در خارج این منحنی (مبداء مختصات در صورتیکه بر روی منحنی نباشد از هر نقطه دیگر بهتر است) را در رابطه (x, y, z) میگذاریم اگر نتیجه مثبت باشد جمیع نقاط واقع در ناحیه‌ایکه شامل نقطه M است در نامعادله صادقند، والا نقاط ناحیه دیگر.

۲۰۹ — حل دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

برای هر يك از سه رابطه دستگاه ناحیه‌ای از صفحه را که جواب مسئله است نگاه داشته ناحیه دیگر را هاشور میزنیم مختصات نقاط قسمت‌های از صفحه که پس از خاتمه کار بی‌هاشور بمانند جوابهای دستگاهند.

$XXXX$ — تابع اولیه — سطح مشخصه

۲۱۰ — اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ مشتق اول تابع $F(x) = \ln x$ باشد $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ میگویند و آنرا چنین نمایش میدهند
$$Y = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx$$

مثال : $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + x = f(x^2 - x + 1) dx$

۲۱۱ - هرگاه پس از تعیین تابع اولیه تابع $y = f(x)$ دو مقدار a و b را بجای x قرار داده تفاضل مقادیری را که بدست میآیند تعیین کنیم میگوئیم مقدار تابع اولیه $y = f(x)$ را بین دو حد $x = a$ و $x = b$ بدست آورده ایم .

مثال : $\int_2^3 (x^2 - 5x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_2^3$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 5 \frac{3^2}{2} \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 5 \frac{2^2}{2} \right)$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 \right) = -\frac{37}{6}$$

۲۱۲ - قضیه - هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد و c هم تابع اولیه آنست (c عددیست ثابت)

۲۱۳ - توابع اولیه مهم بدینقرارند :

تابع
 $y = 0$
 $y = a$
 $y = ax^m$
 $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$

تابع اولیه
 $y = a$ (مقدار ثابت)
 $y = a x + c$
 $y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + c$
 $y = 2a \sqrt{x} + c$

چهار

$$y = \sin x$$

$$y = a \sin mx$$

$$y = \cos x$$

$$y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

$$y = \sqrt{1 + \cot^2 x}$$

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$y = \tan x = \frac{1}{\cos x} - 1$$

$$Y = -\cos x + c$$

$$Y = -\frac{a}{m} \cos mx + c$$

$$Y = \sin x + c$$

$$Y = \tan x + c$$

$$Y = \cot x + c$$

$$Y = \cot g x + c$$

$$Y = -\cot g x + c$$

$$Y = \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x} \sin 2x) + c$$

$$Y = \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x} \sin 2x) + c$$

$$Y = \tan x - x + c$$

۲۱۴ — قضیه . هرگاه تابع $y = f(x)$ در فاصله x_1

و x_2 اتصال باشد سطح محصور بین

منحنی نمایش $y = f(x)$ و محور x

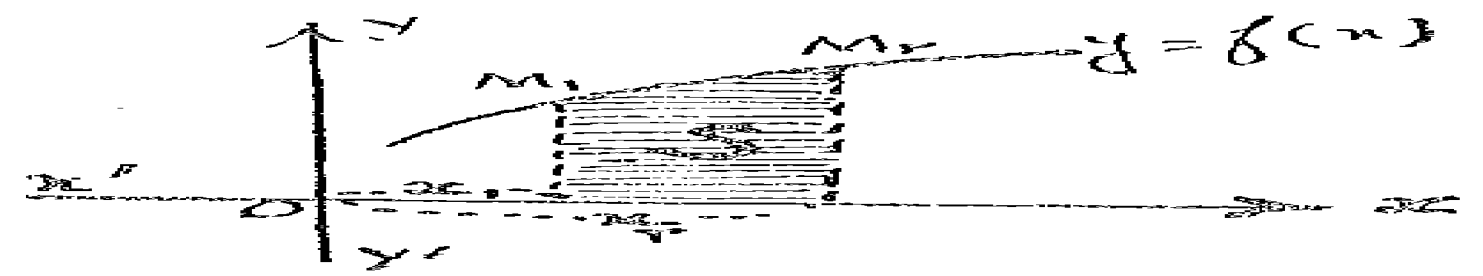
ها و دو عرض ثابت به طول x_1 و x_2

مساوی است با مقدار تابع اولیه

$(f(x))$ بین دو حد x_1 و

x_2 یعنی :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$



شکل ۱۲

مثال ۱ — سطح محصور بین محور x ها و منحنی

$$y = 5x - x^2 \quad (ش ۱۳)$$

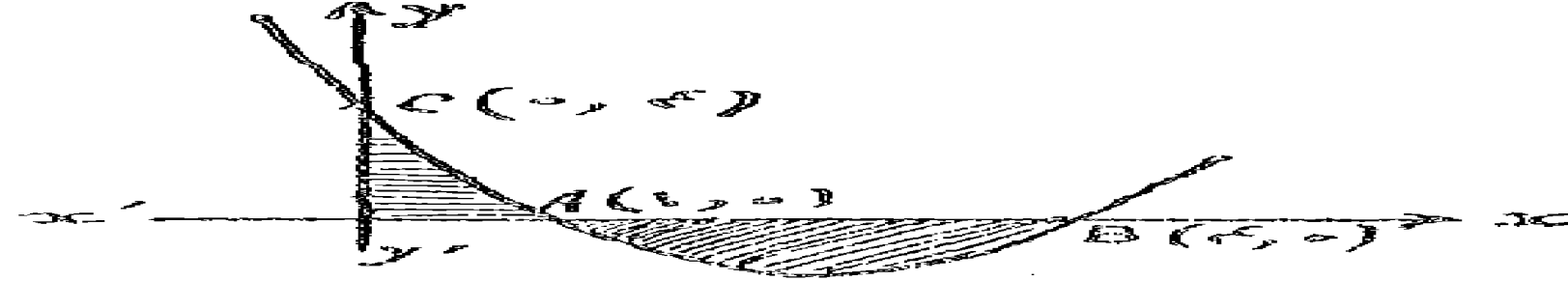
$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^5 (5x - x^2) dx = \frac{1}{6} \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

مثال ۲ — سطح

بین منحنی مثال ۱ و محور y ها و محور x ها (ش ۱۳)

$$S = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \frac{1}{6} \int_0^5 (5x - x^2) dx = \frac{125}{6}$$



شکل ۱۳

نتیجه گیری

معادلات منحنی های مخصوص (۱)

۲۱۵ — معادله دایره — اگر مرکز دایره $M(a, \beta)$ و شعاع آن R باشد:

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-\beta)^2$$

۲۱۶ — معادله بیضی — وقتی مرکز و محورها

آن به ترتیب بر مرکز و محورها مختصات منطبق باشند:

(۱) خروج شود به سمت مختصات همین کتاب

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(a و b نصف محاورهای بلند و کوتاه بیضی هستند)

۲۱۷ - معادله هندلویی - با شرایط شماره ۲۱۶ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

۲۱۸ - معادله سهمی - وقتی محور آن بر محور x ها و رأس آن بر مرکز منطبق باشند و فاصله کانون از خط هادی را p مینمائیم :

$$y^2 = 2px$$

XXXXIII حل معادلات دو جمله و سه جمله

۲۱۹ - معادله دو جمله - معادله دو جمله درجه n ام

بصورت $x^n + px^{n-1} + \dots + b = 0$ می باشد ($p < n$) برای حل آن x^p را عامل مشترک قرار میدهیم :

$$x^p (x^{n-p} + \dots + P) = 0$$

علاوه بر P جواب مساوی ، جواب دیگر معادله عبارتست از :

$$x^{n-p} + \dots + P = 0$$

قاعده بزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول ۱۲۱

اگر p و n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند شرط قابل قبول بودن جواب آنست که a و b مختلف‌العلامه باشند.

۲۲۰ - معادله سه جمله - این معادله که صورت کلی آن $ax^q + bx^p + c = 0$ است در حالت خاصی که n و p و q جمله های يك تصاعد حسابی باشند بصورت يك معادله درجه دوم در می آید و قابل حل است. زیرا چون تفاضل $q - p = p - n$ را فرض کنیم $q = 2r$ $n = q$ میشود و چون در سه جمله q را عامل مشترك قرار دهیم:

$$x^q (ax^{n-q} + bx^{p-q} + c) = 0.$$

یا $x^q (ax^{2r} + bx^r + c) = 0.$

x^r را مساوی y فرض مینمائیم، پس

$$x^q (ay^2 + by + c) = 0.$$

XXXXIV. قاعده بزو برای حل معادلات چند

مجهولی درجه اول

۲۲۱ - این قاعده عبارتست از تعمیم قاعده حذف که در حل معادلات دو مجهولی درجه اول ذکر گردیده است (شماره ۶۵)

فرض کنیم مقصود حل دستگاه درجه اول سه مجهولی

$$(I) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

اگر دو معادله آخر این دستگاه را بترتیب در مقادیر
اختیاری α و β ضرب و سه معادله را باهم جمع و بر حسب α
و β و γ مرتب کنیم چنین خواهیم داشت .

$$(a + a'\alpha + a''\beta)x + (b + b'\alpha + b''\beta)y + (c + c'\alpha + c''\beta)z + (d + d'\alpha + d''\beta) = 0$$

بدیهیست که معادله اخیر جوابهای دستگاه (I) را قبول
میکند. حال مامیتوانیم مقادیر اختیاری α و β را طوری انتخاب
کنیم که ضرایب γ و δ در معادله اخیر صفر شوند .
برای اینکار باید α و β ریشههای دستگاه

$$\begin{cases} b + b'\alpha + b''\beta = 0 \\ c + c'\alpha + c''\beta = 0 \end{cases}$$

باشند یعنی

$$\alpha = \frac{bc' - cb'}{b'c'' - c'b''} \quad \beta = \frac{b''c - cb''}{b'c'' - c'b''}$$

در اینصورت

$$(d + d'\alpha + d''\beta) = 0$$

برای بدست آوردن γ و δ به همین نحو ضرایب دو معادله دیگر
را مساوی صفر قرار میدهیم .

۷ xxx معادلات مجهول القوی و لگاریتمی

۲۲۲ - تعریف - معادله مجهول القوی آنست که در آن مجهول بصورت نماینده عدد معلومی درآمده باشد . معادله لگاریتمی آنست که در آن لگاریتم عددهای مجهول و خود آنها وجود داشته باشند .

با چند مثال نوعهای مختلف اینگونه معادلات و راه حلهای آنها را نشان میدهیم . (در مثالها حروف معلوم همه مثبت فرض میشوند)

مثال ۱ - $a^x = b$

$$x = \frac{\log a}{\log b} \quad \text{یا} \quad \log a = x \log b$$

مثال ۲

$$a^x = b^m$$

فرض میکنیم $m \neq 0$ و $x = \frac{\log b}{\log a}$ باشد پس $a^x = b$

$$x = \log \left[\frac{\log b}{\log a} \right] \quad \text{یعنی}$$

مثال ۳

$$aa^x + b a^x + c = 0$$

فرض میکنیم $a \neq 1$ باشد پس $\log a = y$

و a ریشه معادله $a^2 + b a + c = 0$ است .

مثال ۴

$$\begin{cases} \log ax + \log y = m \\ ax + by = c \end{cases}$$

این دستگاه تبدیل میشود بدستگاه

$$\begin{cases} xy = \sqrt{m} \\ ax + by = c \end{cases}$$

مثال ۵

$$(i) \begin{cases} x^a = y^x \\ x^a = y^b \end{cases}$$

دستگاه (I) تبدیل میشود بدستگاه :

$$(ii) \begin{cases} y \log x = a \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases}$$

که پس از تقسیم عضو عضو بصورت
 $x = \frac{a}{b} y$
 درمیآید و اگر فرض کنیم $a = b$ باشد مقادیر a عبارتند از
 جولیهای معادله

$$x^b (x^{(a-b)} - (\frac{a}{b})^b) = 0$$

$$A(ax^2 + bx + c) = B \quad \text{مثال ۴ معادله}$$

$$ax^2 + bx + c = \frac{\log B}{\log A} \quad \text{منجر میشود بمعادله}$$

xxxxx VII. تجزیه رادیکالهای مرکب

$$243 = \sqrt{A} \sqrt{B} \quad \text{منصوبه این عمل تجزیه عبارت}$$

است بصورت مجموع یا تفاضل دو رادیکال .

قضیه - اگر $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$ باشد
(B و B' مجذور کامل نیستند) $A = A'$ و $B = B'$ میباشد .

حال برای تجزیه $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ آنرا مساوی $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ فرض نموده و آنرا حساب میکنیم :

$$\begin{aligned} \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \\ A \pm \sqrt{B} &= x + y \pm 2\sqrt{xy} \end{aligned}$$

پس :

$$\begin{cases} x + y = A \\ xy = \frac{B}{4} \end{cases}$$

x و y ریشه های معادله $x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$ میباشد :

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad // \quad y = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

بدیهیست که برای مرکب نبودن طرف دوم باید $A^2 - B$ مجذور کامل باشد .

XXXXVII حل معادله درجه سوم

۲۲۴ - نخست میگوئیم هر معادله کامل درجه سوم را

میتوان بصورت معادله ناقص $x^2 + px + q = 0$ در آورده .
 زیرا اگر در معادله $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ نخست
 تمام جمل را بر a_1 تقسیم کنیم بصورت $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ و چون a را مساوی 1 < > فرض نمائیم و
 بجای a مقدار $\frac{a}{3}$ را قرار دهیم ضریب درجه دوم از بین
 میرود و معادله بصورت $x^3 + px + q = 0$ در می آید . که

$$\text{در آن } p = \frac{3b - a^2}{3} \text{ و } q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

۲۲۵ - تحقیق در عدد جوابها - تابع درجه سوم
 $x^3 + px + q = 0$ ممکنست دارای یک یا کثریم و یک می نیم
 باشد که طول آنها ریشه های مشتق $x^2 + px = 0$ یا $x_1 = 0$ یا $x_2 = -p$ باشد .
 میباشد . شرط وجود ما کثریم و می نیم اینست که $\Delta > 0$ باشد .
 باشد . اگر این شرط تحقق یابد و مقادیر ما کثریم و می نیم
 تابع مختلف علامه باشند منحنی صعودی ها را در سه نقطه
 قطع میکنند یعنی معادله $x^3 + px + q = 0$ سه جواب دارد
 اما اگر ما کثریم و می نیم منحنی علامه باشند معادله بیش از
 یک جواب نخواهد داشت .
 مقدار ما کثریم و می نیم چنین اند .

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{412}{3}} + \sqrt[3]{\frac{412}{3}} \text{ و } x_2 = \sqrt[3]{\frac{412}{3}} - \sqrt[3]{\frac{412}{3}}$$

و حاصلضربشان $\frac{2P^2}{\sqrt{7}} - 1 = 0$ میباشند.

پس هرگاه $1 = \frac{2P^2}{\sqrt{7}}$ ، $27 - 4P^2 = 0$ معادله سه جواب دارد
و $1 = \frac{2P^2}{\sqrt{7}}$ ، $27 - 4P^2 = 0$ دو « (یکی مضاعف)
و $1 = \frac{2P^2}{\sqrt{7}}$ ، $27 - 4P^2 = 0$ يك «

۲۲۶ - حل معادله $x^3 + px + q = 0$ از راه مثلثاتی

یادآوری میکنیم که $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

یا $\cos 3\varphi = \frac{1}{4} \cos\varphi - \frac{3}{4} \cos^3\varphi$ (۱)

اکنون در رابطه $1 = -x^3 + px + q$ بجای x مقدار $\sqrt[3]{r} \cos\varphi$ را قرار میدهیم تا رابطه

$$\frac{1}{4} = \cos\varphi - \frac{3}{4} \cos^3\varphi \quad (۲)$$

بدست آید. اگر $\frac{1}{4} = \cos\varphi - \frac{3}{4} \cos^3\varphi$ و $\frac{1}{4} = \cos\varphi - \frac{3}{4} \cos^3\varphi$

فرض شوند یعنی $1 = \sqrt[3]{r} \cos\varphi$ و $\cos 3\varphi = \frac{\sqrt[3]{r} \cos\varphi}{\sqrt[3]{r}}$

باشند معادله (۲) تبدیل بمعادله (۱) میشود.

از روی مقدار $\cos 3\varphi$ نخست سه زاویه 3φ و $2\pi - 3\varphi$

و $2\pi - 4\varphi$ را یافته $\frac{1}{3}T$ آنها را در مقدار $P = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ ضرب می کنیم تا سه جواب معادله $x^3 - 1 = 0$ را بدست آوریم. بدیهیست که شرط وجود جواب منفی بودن $(1 - 27P^2) > 0$ میباشد.

مثال عددی - $x^3 - 1 = 0$

$$P = \frac{1}{3}\sqrt{2} = 0.4714045207911$$

$$\cos 4\varphi = \frac{\sqrt{27(1 - 27P^2)}}{27P^3} = \frac{\sqrt{27 \times 1.5773502691928}}{1.2701773177154} = 0.15000$$

پس :

$$\varphi_1 = 20^\circ$$

$$\varphi_2 = 140^\circ$$

$$\varphi_3 = 100^\circ$$

یعنی

$$\cos \varphi_1 = 0.93967$$

$$\cos \varphi_2 = -0.17364 \quad \cos \varphi_3 = -0.77660$$

و بالاخره

$$x_1 = 2.1798$$

$$x_2 = -1.77689$$

$$x_3 = -0.4009$$

مثلاث

۱ کلیات

۱ - موضوع - هر مثلث دارای شش جزء (سه ضلع و سه زاویه) است که اگر سه تای آنها را بوضع مناسبی (در جوع شود به هندسه) داشته باشیم میتوانیم سه جزء دیگر را بدست آوریم.

در مثلثات قواعدی گفته میشوند که یکمکث آنها از روی اجزاء معلوم اجزاء مثلث را میتوان حساب کرد.

۲ - اندازه قوسی - برای اندازه گرفتن قوس دایره (یا زاویه مرکزی مقابل آن) سه واحد بکار میرود:

۱) درجه = $\frac{1}{360}$ محیط دایره = $\frac{1}{360}$ زاویه قائمه.

اجزاء آن : دقیقه = $\frac{1}{60}$ درجه

ثانیه = $\frac{1}{60}$ دقیقه = $\frac{1}{3600}$ درجه

۲) گراد $\frac{1}{\rho}$ محیط دایره $\frac{1}{\rho}$ زاویه

قاعده

اجزاء آن : قوسی گراد $\frac{1}{\rho}$ ، مسافتی گراد

$\frac{1}{\rho}$ ، میلی گراد $\frac{1}{\rho}$ گراد

۳) — رادیان — و آن قوسی است از دایره که طولش مساوی شعاع دایره باشد . پس محیط دایره برابر است با ۲ رادیان .

۳ — رادیان بین درجه ، گراد و رادیان
اگر اندازه قوس ATB مساوی D درجه و G گراد و R رادیان باشد :

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} = \frac{G}{90}$$

۴ — دایره مثال‌هایی — دایره ایست که شعاع آن مساوی واحد باشد :

۵ — دایره جهت‌دار — دایره‌ای که جهت مثبت یا منفی آن تعیین شده باشد دایره جهت‌دار میگویند .

اگر متحرکی از نقطه A واقع بر روی محیط دایره حرکت کند تا به نقطه B برسد گوئیم قوس AB را طی نموده است . A را مبدأ و B را منتهای قوس گویند . مسافت

مستترک پس از هر گشت از نقطه A یک یا چند دور محیط دایره را طی کنند و در B متوقف شود در این صورت هم مستترک قوس AB را طی کرده است. اگر طول کوچکترین قوس AB مساوی α رادیان باشد:

$$\alpha = 2K\pi \pm AB \text{ ق}$$

(K عددی است صحیح مثبت یا صفر یا منفی)

۶ - قضیه شال - اگر نقاط A و B و C و \dots و H بر

روی محیط دایره واقع باشند:

$$2K\pi = FA \text{ ق} \pm ID \text{ ق} \pm CD \text{ ق} \pm BC \text{ ق} \pm AB \text{ ق}$$

اگر نقطه M واقع بر محیط دایره مبدأ قوسها، a و b طول

های قوسهای MA و NB و نقطه C وسط AB باشد.

$$b \pm \frac{a}{2} = 2K\pi \pm MC \text{ ق}$$

۷ - تعریف - دو قوس را که دارای مبدأ مشترک باشند

قرینه گویند و قتیکه منتهای آن دو نسبت به دوری که از

مبدأ مشترک میگذرد قرینه باشند.

مجموع دو قوس قرینه مساویست با $2K\pi$.

۸ - تعریف - دو قوس را همگام گویند و قتیکه مجموع

آنها مساوی ربع دایره یا $\frac{\pi}{2}$ باشد.

۹ - تعریف - دو قوس را متکامل گویند و قتی که

مجموعه شایسته مساوی نصف محیط دایره یا π باشد.

II خطوط مثلثاتی

۱۰ - تعریف - اگر در دایره مثلثاتی قوس $AM = \alpha$ داده شده باشد و AA' قطر مار بر میداء A و BB' قطر عمود بر آن را رسم کنیم و عمودهای MP و MQ را بر آن دو قطر فرود آوریم و

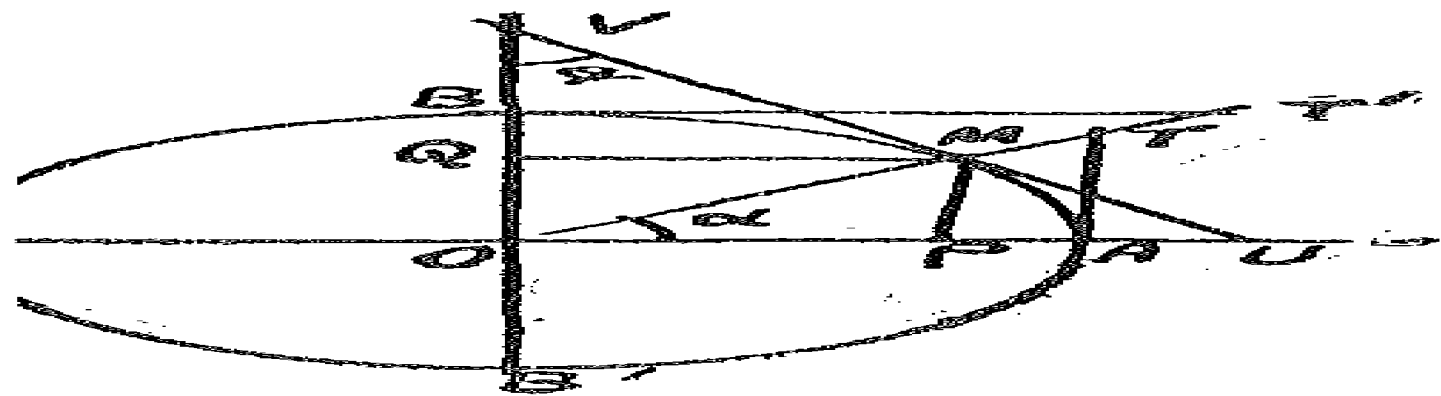
امتداد شعاع OM مماس در نقطه A را در T و مماس در نقطه B را در T' قطع نماید و مماسی که از M بر دایره رسم شود قطر AA' را در U و BB' را در V تلاقی کند :

۱) MP را جیب یا سنیوس α (Sinus) علامت اختصاری $\sin \alpha$

۲) OP را جیب تمام یا کسینوس α (Cosinus) علامت اختصاری $\cos \alpha$

۳) AT را ظل یا تانژانت α (Tangente) علامت اختصاری $\tan \alpha$

۴) BT' را ظل تمام یا کتانژانت α (Cotangente) علامت اختصاری $\cotg \alpha$



۱۳ — روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهای یکتا

تفاضل یا مجموعشان مضرب بی از π باشد. (k عددی است بزرگتر یا کوچکتر از صفر یا مساوی آن)

۱ — اگر $a - b = k\pi$ (تفاضل دو قوس مضرب زوج π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin (\sqrt{k\pi} + b) = \sin b \\ \cos a = \cos (\sqrt{k\pi} + b) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (\sqrt{k\pi} + b) = \operatorname{tg} b \end{cases}$$

۲ — اگر $a - b = \sqrt{k\pi}$ (مجموع دو قوس مضرب زوج π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin (\sqrt{k\pi} - b) = -\sin b \\ \cos a = \cos (\sqrt{k\pi} - b) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (\sqrt{k\pi} - b) = -\operatorname{tg} b \end{cases}$$

۳ — اگر $a - b = (\sqrt{k+1}) \pi$ (تفاضل مضرب فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin [(\sqrt{k+1}) \pi + b] = \sin b \\ \cos a = \cos [(\sqrt{k+1}) \pi + b] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [(\sqrt{k+1}) \pi + b] = \operatorname{tg} b \end{cases}$$

۴ — اگر $a + b = (\sqrt{k+1}) \pi$ (مجموع مضرب فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin [(\sqrt{k+1}) \pi - b] = \sin b \\ \cos a = \cos [(\sqrt{k+1}) \pi - b] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [(\sqrt{k+1}) \pi - b] = -\operatorname{tg} b \end{cases}$$

۱۴- در قوسهای متمم α یعنی اگر $a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد :

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{ctg} b$$

اگر تفاضل دو قوس يك قائمه باشد $a - b = \frac{\pi}{2}$

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\operatorname{ctg} b$$

۱۵- روابط بين قوسهایی كه يك خط مثلثاتی داشته باشند :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2k\pi + b \\ a + (2k + 1)\pi = b \end{array} \right. : \sin a = \sin b \text{ اگر } 1 -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2k\pi + b \\ a = 2k\pi - b \end{array} \right. : \cos a = \cos b \text{ اگر } 2 -$$

$$a = k\pi + b : \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \text{ اگر } 3 -$$

۱۶ - جدول مثلاثاتی برخی قوسهای مهم :

cos	tg	cos	sin	قوس
∞	۰	۱	۰	۰
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$
۱	۱	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
۰	∞	۰	۱	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$

۱۷ - دوره تناوب خطوط مثلاثاتی

خطوط مثلاثاتی قواسم متناوب (جبر ، شماره ۱۵۲) قوس

مستند ، دوره تناوب جیب و جیب تمام و قطر ظل و قطر ظل تمام 2π و دوره تناوب ظل و ظل تمام π میباشد .

III - جمع و تفریق و ضرب و تقسیم قوسها

۱۸ - تصویر در محور - هرگاه a طول قطعه خط

AB و α زاویه آن با جهت مثبت محور و a' تصویر آن بر محور باشد :

$$a' = a \cos a$$

۱۹ — خطوط مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو قوس

$$\sin (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{مجموع}$$

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

$$\sin (a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad \text{ب — تفاضل}$$

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

۲۰ — مجموع سه قوس :

$$\sin (a+b+c) = \sin [(a+b)+c] =$$

$$\sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b$$

$$- \sin a \sin b \sin c$$

$$\cos (a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c$$

$$- \cos b \sin a \sin c - \cos c \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b+c) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} \operatorname{tgc}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} - \operatorname{tgb} \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgc}}$$

۲۱ — خطوط مثلثاتی قوسهای که مضرب یک

قوس هستند :

۱ — قوسهای دو برابر :

مثلثات

$$\sin \gamma a = \gamma \sin a \cos a$$

$$\cos \gamma a = \cos^{\gamma} a - \sin^{\gamma} a = \gamma \cos^{\gamma-1} a - 1 = 1 - \gamma \sin^{\gamma} a$$

$$\lg \gamma a = \frac{\gamma \lg a}{1 - \lg^{\gamma} a}$$

۲ - قوسهای سه برابر:

$$\sin \gamma a = \gamma \sin a - 2 \sin^{\gamma} a$$

$$\cos \gamma a = 2 \cos^{\gamma} a - \gamma \cos a$$

$$\lg \gamma a = \frac{\gamma \lg a - \lg^{\gamma} a}{1 - \gamma \lg^{\gamma} a}$$

۳ - قوسهای پنج برابر:

$$\sin 5a = 5 \sin a - 2 \sin^{\gamma} a - 1 \sin^5 a$$

$$\cos 5a = 1 \cos^5 a - 2 \cos^{\gamma} a - 5 \cos a$$

۲۲ - خطوط مثلثاتی یک قوس بر حسب ظل نصف آن

$$\sin a = \frac{\gamma \lg \frac{a}{\gamma}}{1 + \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}, \quad \cos a = \frac{1 - \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}{1 + \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}, \quad \lg a = \frac{\gamma \lg \frac{a}{\gamma}}{1 - \lg^{\gamma} \frac{a}{\gamma}}$$

۲۳ - خطوط مثلثاتی یک قوس بر حسب جیب دو برابر آن

$$\sin a = \frac{1}{\gamma} \left(\pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \right)$$

$$\cos a = \frac{1}{\gamma} \left(\pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma a} \right)$$

۲۴- خطوط مثلثاتی يك قوس بر حسب جیب تمام دو برابر آن

$$\sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

۲۵- محاسبه $\lg a$ بر حسب $\lg 2a$

$$\lg a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \lg^2 2a}}{\lg 2a}$$

۱۷- لگاریتمی کردن

۲۶- درجه‌ای که لگاریتم حاصلضرب (یا خارج

قسمت) چند مقدار برابر است با مجموع (یا تفاضل) لگاریتم های آنها .

چون در جداول لگاریتم بجای خطوط مثلثاتی قوسهای مختلف لگاریتمهای آن خطوط را داده اند اغلب محتاج با استفاده از لگاریتم خطوط بجای خود آنها هستیم . بنا براین باید سعی کنیم تا هر جا که ممکن است بجای مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی حاصلضرب یا خارج قسمت آنها را بدست آوریم .

این عمل ، یعنی تبدیل مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی به حاصلضرب یا خارج قسمت ، را لگاریتمی کردن یا قابل محاسبه کردن آنها میگویند .

۱۷- تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی

به حاصلضرب :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

۱)

$$1) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$2) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$3) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$4) \quad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$5) \quad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$6) \quad \cos p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p-q}{2} \right)$$

$$7) \quad \sin p + \cos q = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

$$8) \quad 1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

$$9) \quad 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \right)$$

$$10) \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$11) \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

٢٨ - قیدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی و مجموع

یا تفاضل :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) + \cos (a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a-b) + \sin (a+b)]$$

۲۹ — تبدیل برخی عبارات مثلثاتی به حاصلضرب

(۱) برای تبدیل عبارت $a \cos x + b \sin x$ فرض میکنیم

$$\frac{b}{a} = \tan \varphi \quad \text{باشد}$$

$$a \cos x + b \sin x = a \left(\cos x + \frac{b}{a} \sin x \right) \quad \text{پس}$$

$$= a (\cos x + \tan \varphi \sin x) = \frac{a}{\cos \varphi} \cos (\varphi - x)$$

(۲) برای تبدیل عبارت $a + b$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = \tan^2 \varphi$

باشد : پس

$$a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) = a (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

(۳) برای تبدیل $a - b$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi$ باشد :

$$a - b = a (1 - \sin^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi \quad \text{پس}$$

(۴) برای تبدیل $\frac{a}{a-b}$ فرض میکنیم φ $\lg \frac{b}{a}$ باشد :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\lg \varphi}{1+\lg \varphi} = \lg \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad \text{پس}$$

(۵) برای تبدیل $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ فرض میکنیم φ $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ باشد :

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} = \lg \frac{\varphi}{2} \quad \text{پس}$$

(۶) حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

از راه مثلاثات :

اگر فرض کنیم $x = \lg \varphi$ ، معادله باینصورت در میآید

$$a = -c + b \sin 2\varphi + (c-a) \cos 2\varphi = 0$$

برای حل این معادله و تعیین φ هر اچمه شود به حل معادلات مثلاثاتی (شماره ۳۴)

۷ روابط بین اجزاء مثلاث

۳۰ — در مثلاث قائم

$$A = \frac{\pi}{2} \quad B + C = \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$b = a \sin B = a \cos C = c \lg B = a \cot \lg C \quad (۲)$$

$$c = a \sin C = a \cos B = b \lg C = b \cot \lg B \quad (۳)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۴)$$

$$\lg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+b}} \quad (۵) \quad \lg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+c}}$$

۴۹. دو مثلث غیر مشخص

(شعاع دایره محیطی R)

$$A + B + C = 2\pi \quad (۱)$$

$$(I) \text{ دستگاه } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (۲)$$

$$(II) \text{ دستگاه } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \quad (۳)$$

$$(III) \text{ دستگاه } \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = b \cos A + a \cos B \end{cases} \quad (۴)$$

۴۴. روابط بین اضلاع و زوایای مثلث باشد

دو دایره محیطی و مماسی

(R شعاع دایره محیطی، r شعاع دایره مماسی، r_a ،

r_b و r_c اشعه دایره مماسی خارج، a و b و c اضلاع، p محیط)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

رر — مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$$

$$S = \frac{abc}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$$

(٩٩) ارتفاعات مثلث

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$b \sin C = c \sin B = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{\gamma}{b} \sqrt{\dots} = a \sin C = c \sin A = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{\gamma}{c} \sqrt{\dots} = a \sin B = b \sin A = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

۳۵ — منصف زاویه‌ها - اگر l_a و l_b و l_c منصف

زاویه‌های داخلی A و B و C و λ_a و λ_b و λ_c منصف زاویه

های خارجی T آنها باشند :

$$l_a = \frac{\gamma}{b+c} \sqrt{bc(p-a)} = \frac{b \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$l_b = \dots \quad l_c = \dots$$

$$\lambda_a = \frac{\gamma}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)} = \frac{b \sin C}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{c \sin B}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \sin \frac{B-C}{2}}$$

$$\lambda_b = \dots \quad \lambda_c = \dots$$

۳۶ — میانه‌ها

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$r_c = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}$$

۳۷ - دو دایره یی از جنات مختلف

$$h_a = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - (a^2 + b^2 - c^2)} \quad (1)$$

$$h_b = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - (a^2 + b^2 - c^2)} \quad (2)$$

$$h_c = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - (a^2 + b^2 - c^2)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad (4)$$

$$\varepsilon R = r_a + r_b + r_c - r \quad (5)$$

$$16 R^2 = r^2 + r_b^2 + r_a^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (6)$$

(۷) اگر O مرکز دایره محیطی و I مرکز دایره محاطی و H محل تلاقی ارتفاعات باشد،

$$OH^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

$$OI = R (R - 2r)$$

$$abc = \varepsilon prR \quad (8)$$

VI معادلات مثلثاتی

۳۸ - معادله مثلثاتی بیان تساوی بین دو عبارتست که هر يك شامل يك خط یا چند خط مثلثاتی يك یا چند قوس باشند

و تساوی آنها بازنه برخی از مقادیر این قوسها محقق گردد. این مقادیر را جواب های معادله مثلثاتی گویند.

۳۹ - معادله یک مجهولی آنست که فقط یک قوس یا مضارب آن در آن مجهول باشند. اگر مقدار قوسهای مجهول از یک تجاوز کند معادله چند مجهولی خواهد بود.

۱ - به معادله یک مجهولی - بر دو نوع است :

۱ - نوع اول - معادله ای که فقط شامل یک خط

مثلثاتی قوس مجهول باشد : برای حل آن باید همان خط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و معادله را بطریق دیگری حل نمود. پس از بدست آمدن مقدار مجهول قوسهای متناظر با آن خط مثلثاتی جوابهای مسئله اند.

مثلا در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ پس از حل $\frac{1}{2} = \sin x$ در

میشود. پس $x = \frac{\pi}{6}$ و در نتیجه $x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi$ در

۱ - نوع دوم - معادله ای که شامل چندین خط

مثلثاتی قوس مجهول باشد :

برای حل آن باید یکی از خطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و سایر خطوط مثلثاتی را با آن خط تبدیل و مطابق حالت اول عمل نمود.

در معادلات نوع دوم برای انتخاب مجهول معاون از قاعده بیوش میتوان استفاده نمود :

۲ - قاعده بیوش Bioche - ۱ - اگر در معادله ای

قوس x را به $(x - \pi)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $asin x + b cos x = c$ را مجهول معاون بگیریم.

۲ - اگر در معادله قوس x را به $(x - \pi)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $asin x + b cos x = c$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۳ - هرگاه در معادله قوس x را به $(x + \frac{\pi}{2})$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $asin x + b cos x = c$ را مجهول معاون قرار می‌دهیم.

۴ - اگر x را به $(x - \pi)$ و $(x + \frac{\pi}{2})$ و $(x + \frac{\pi}{4})$ تبدیل کردیم و در هر سه حال معادله تغییر کرد، باید $\frac{x}{4}$ را مجهول معاون قرار داد.

۴۳ - حل معادلات کلاسیک - غیر از طریق مذکور اغلب ممکن است معادلات مثلثاتی را بکمک دستورات مثلثاتی برآمدهائی که آسان تر باشد حل نمود. برای نمونه طریقه حل معادلات معروف بکلاسیک را بیان میکنیم.

(۱) - حل معادله کلاسیک $asin x + b cos x = c$ (۱)

حل ۱ - اگر a و b و c عددی باشند $\frac{b}{a}$ را φ فرض

$$asin x + b cos x = c \Rightarrow a(\sin x + \frac{b}{a} \cos x) = c$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}$$

چون طرف دوم مقدار یست معلوم $\varphi + x$ و در نتیجه x بدست می آید .

بحث - شرط وجود جواب این است که $1 \geq \cos \varphi \frac{c}{a}$

باشد : یا چون بجای $\cos \varphi$ مقدار آن را بر حسب b و a قرار دهیم :

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

حل ۴ - اگر a و b و c پارامتری باشند $\frac{x}{r} = \frac{c}{a}$ را مجهول معاون انتخاب میکنیم تا معادله (۱) بصورت معادله درجه دوم

$$b = c - a \frac{x}{r} \Rightarrow 2ar \frac{x}{r} + c - b = 0$$

در آید که در آن شرط وجود جواب ، مثبت یا مساوی صفر بودن مبین است ، یعنی

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

(II) حل معادله کلاسیک $c \cos \varphi = a \cos \varphi + b \sin \varphi$

حل ۵ - اگر ضرایب a و b و c عددی باشند معادله مفروض را چنین مینویسیم :

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x - c \sin x \cos x = 0 \quad \text{و یا}$$

$$a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{1 + \cos 2x}{2} - c \frac{\sin 2x}{2} = 0 \quad \text{و یا}$$

$$c \sin^2 x + (a - b) \cos^2 x = a + b \quad \text{یعنی}$$

که مانند مسئله ۱ حل می‌شود.

حل ۳ - اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند، r را مجهول معاون میگیریم و معادله باینصورت درمیآید:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c.$$

۱۱۱ حل معادله کلاسیک

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

حل ۱ - اگر ضرایب عددی باشند معادله را میتوان باینصورت نوشت:

$$b \sin^2 x + (c - a) \cos^2 x = 2d - a - c$$

حل ۲ - اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند طرف دوم معادله را در $\cos^2 x + \sin^2 x$ ضرب و طرفین معادله

حاصل را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم تا معادله

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = d (1 + \tan^2 x)$$

$$(a - d) \tan^2 x + b \tan x + (c - d) = 0$$

و یا حاصل شود که با آسانی میتوان آنرا حل و بحث نمود.

۱۷ حل معادله کلاسیک $\sin px = \sin qx$

حل - اگر p و q عددی باشند

$$\begin{cases} pX = \sqrt{k}\pi + qX \\ pX = (\sqrt{k} + \sqrt{-1})\pi + qX \end{cases}$$

$$X = \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{-1})\pi}{p - q} \quad \text{یا} \quad X = \frac{\sqrt{k}\pi}{p - q} \quad \text{یعنی}$$

ب — معادلات چند مجهولی

۴۴ — بدیهیست که بتعداد مجهولها باید معادله داده شده باشد. پس دستگاههای معادلات چند مجهولی خواهم داشت. برای حل دستگاههای معادلات چند مجهولی مثلثاتی قاعده معینی نمیتوان گفت جز اینکه اصولاً معادلات چند مجهولی با استفاده از قواعد جبری و راه حلهایی که برای حل معادلات یک مجهولی و انتخاب مجهول معاون گفته شده است حل میشوند.

۴۵ — هرگاه در دستگاه علاوه بر خطوط مثلثاتی خود قوسها هم وجود داشته باشند اشکال زیادتر است. آنها در دستگاههای دو مجهولی که مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو خط داده شده باشند با کمک دستورهایی شماره ۲۷ و ۲۸ میتوان مسائل را آسانی حل کرد. اینک چند نمونه:

۱) دستگاههایی که در آن مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام داده شده باشند:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases} \quad \text{مثال}$$

از رابطه

$$a \cos x + b \sin x = c \quad \text{یا} \quad a \cos y + b \sin y = c$$

تفاضل x یا y ، و از روی مجموع و تفاضل دو مجهول خود آنها را بدست میآوریم.

(II) دستگاههایی که مجموع و تفاضل دو خط مثلثاتی را شامل باشند :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

مثال

هر معادله دستگاه را جداگانه لگاریتمی کرده و حاصل را بهم تقسیم میکنیم نتیجه میشود :

$$\frac{a + b}{2} = \frac{b}{a}$$

و از روی آن $x + y$ بدست میآید. آنگاه مقدار $\frac{x+y}{2}$

را در یکی از معادلات لگاریتمی شده دستگاه برده x یا y بدست میآوریم.

(III) مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب دو جیب یا درجیب تمام در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

مثال

معادله دوم را بحاصلجمع و تفاضل قوسها تبدیل کرده
 از روی آن $x - y$ را بدست میآوریم .
 IV - علاوه بر مجموع یا تفاضل دوقوس خارج قسمت دو
 در خط از یکتو در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\sin x}{\sin y} = b \end{cases}$$

مثال

معادله دوم را ترکیب و تفصیل نسبت میکنیم :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cot y - \cot x}{1} = \frac{a + 1}{a - 1}$$

پس $x - y$ بدست میآید .

V - اگر علاوه بر مجموع یا تفاضل دوقوس مجموع،
 تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو ظل یا دو ظل تمام آنها
 داده شده باشند مسئله با مختصر تصرفی مانند نمونه‌های I تا
 IV قابل حل میشود .

$$\begin{cases} x + y = a \\ \lg x + \lg y = s \end{cases}$$

مثال

$$\lg x + \lg y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} =$$

$$\frac{\sin(x + y)}{\frac{1}{2} \left[\cos \frac{x + y}{2} + \cos \frac{x - y}{2} \right]} = \frac{2 \sin a}{\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{x - y}{2}}$$

از $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$ میتوان $\pi - x$ را بدست آورد.

VII نامعادلات مثلثاتی

۴۶ - برای حل نامعادله مثلثاتی باید طریقه حل نامعادلات جبری را بکار برد یعنی جمیع جمل را بیکطرف نامعادله نقل کرد و پس از انجام اعمال لازم عبارت را بهاصل ضرب عوامل تجزیه و علامت هر عامل را در فواصل جوابها تحقیق کرد و از مقایسه علامت، جوابهای نامعادله را تعیین نمود.

مثال - برای حل نامعادله $0 < \sqrt{3} - 2 \sin x$ وقتی که $2\pi > x$ باشد ابتدا آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جوابهایش را که عبارتند از $x = \frac{2\pi}{3}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ (جوابهای بین صفر و 2π) بدست آورده جدول ذیل را تشکیل میدهیم:

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	π
$\sqrt{3} - 2 \sin x$	+	+	+
جواب ندارد	جواب دارد	جواب ندارد	جواب ندارد

پس نامعادله بازاء $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ صادق است.

VIII حل مثلث

۴۷ - حل مثلث یعنی بدست آوردن اجزاء مجهول آن

از روی اجزاء معلوم بوسیله محاسبه .
 ۴۸ - اگر اجزاء معلوم از اجزاء اصلی مثلث (اضلاع و زوایا) باشند میگویند يك حالت کلاسیک است و اگر از اجزاء فرعی (اشعه دواير ، ارتفاعات و مانند آنها) باشند، يك حالت غیر کلاسیک .

۴۹ - روابط بین اجزاء اصلی مثلث قائم در شماره ۳۰ (۱ تا ۳) و روابط بین اجزاء اصلی مثلث غیرمستخص در شماره ۳۱ (دستگاہهای I و II و III) گفته شده است . و نیز روابط بین سایر اجزاء مثلثها در شماره های ۳۲ تا ۳۷ درج گردیده اند .
 ۵۰ - تعادل دستگاہها - در هر مثلث دستگاہهای A و II و III (شماره ۳۱) متعادلد یعنی هر يك را میتوان از روی دیگری بدست آورد .

مثلا برای بدست آوردن دستگاہ II از دستگاہ A باین طریق عمل میکنیم :

$$\begin{aligned} A &= \pi - (B + C) \\ \sin A &= \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ &= \sin B (\sin C) + \cos B (\sin C) \\ &= \sin B \sin C + \cos B \sin C \\ &= \sin B \sin C + \sin C \cos B \end{aligned}$$

و چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مقادیرشان

$\frac{a}{\sqrt{R}}$ و $\frac{b}{\sqrt{R}}$ و $\frac{c}{\sqrt{R}}$ را که از دستگاه I بدست می‌آیند قرار دهیم
رابطه اول دستگاه II نتیجه میشود .

۵۹ — حل مثلث قائم در حالات گلاسیات

اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	فرمولهایی که باید بکار برد
حالت اول a, B	c, b, C	$C = 90^\circ - B$ $b = a \sin B$ $c = a \cos B$
حالت دوم b, B	c, a, C	$C = 90^\circ - B$ $c = b \cot B$ $a = \frac{b}{\sin B}$
حالت سوم b, a	c, C, B	$\sin B = \frac{b}{a}$ $C = 90^\circ - B$ $c = a \sin B$
حالت چهارم c, b	a, C, B	$\lg B = \frac{b}{c}$ $C = 90^\circ - B$ $a = \frac{b}{\sin B}$

۵۳ - حل مثلث غیر قائم در حالات کلاسیک

فرمول‌هایی که باید به کار برد	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	حالت اول
$A = \pi - (B + C)$ $b = a \frac{\sin B}{\sin A}$ $c = a \frac{\sin C}{\sin A}$	a, A, c	b, B	
$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \\ B + A = \pi - C \end{cases}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	A, c, B	b, a	حالت دوم
$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ $C = \pi - (A + B)$ $c = a \cos B + b \cos A$	C, B, c	A, a	حالت سوم
$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\sin B = \frac{b}{c} \sin C$ $A = \pi - (B + C)$	C, B, A	c, a	حالت چهارم

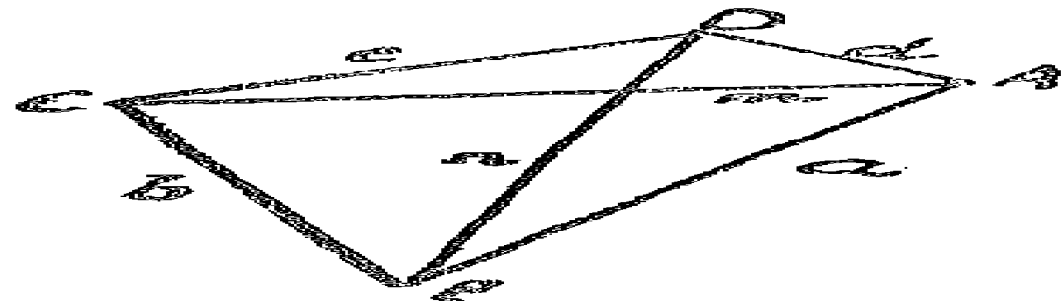
۵۴ - حل مثلث در حالات غیر کلاسیک - این حالات

بسیار متنوعند و بطور کلی قاعده‌ای برای آنها نمیتوان گفت فقط دو نکته اساسی ذیل، خاطر نشان میشوند .

۱ - در حل و بحث مسائل بهتر است صکه از محاسبه زوایا شروع شود ، زیرا اضلاع از روی زوایا به آسانی بدست میآیند .

۲ - هر جا مجموع دو مجهول معلوم باشد خوبست تفاضل آن دو را نیز بدست آورد تا به آسانی بتوان آن ها را پیدا کرد .

۱-۵۴- چهار بره‌ای گوژ



(ش ۲)

۵۴ - هر چهار بر گوژ (محدب) چهار ضلع و چهار زاویه دارد که فرض معلوم بودن پنج‌تای آنها، بشرط آنکه اقلا دو تاي آنها ضلع باشند ، میتوان چهار بر را حل و رسم کرد . در چهار بر $A B C D$ (ش ۲) زوایا را به A و B و C و D و اضلاع را a و b و c و d نمایش میدهند .

برای محاسبه اجزاء مجهول چهار بر از روی اجزاء معلوم آن ، آنرا بوسیله رسم دوقطر به مثلثها تجزیه میکنیم و اجزاء مجهول را حساب میکنیم .

۵۵ - مسئله . از چهار بری چهار ضلع و يك زاویه معلومست . زوایای دیگر را حساب کنید .

چون اقطار را m و n بنامیم (ش ۲) :
 در مثلث DAI میتوان n را حساب کرد (شماره ۵۲ ،
 حالت دوم) و از روی آن زاویه C را بدست آورد (شماره ۵۲
 حالت چهارم) . و نیز از حل دو مثلث ADI و DCI زوایای ADI
 و DCI که مجموعشان زاویه D است بدست میآید و زاویه E
 از رابطه $2\pi = D + C + B + A$ (هندسه) بدست میشود .

۵۶ - زوایای این اجزاء چهار بره‌های

$$A = \pi - B - D - C$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos(\pi - B - D - C) = -\cos(B + D + C) \\ &= -\cos(B + D)\cos C + \sin(B + D)\sin C \\ &= -\cos(B + D)\cos C + \sin(B + D)\sin C \end{aligned}$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$A = \pi - B - D - C$$

$$\sin \alpha = \frac{KS}{mn}$$

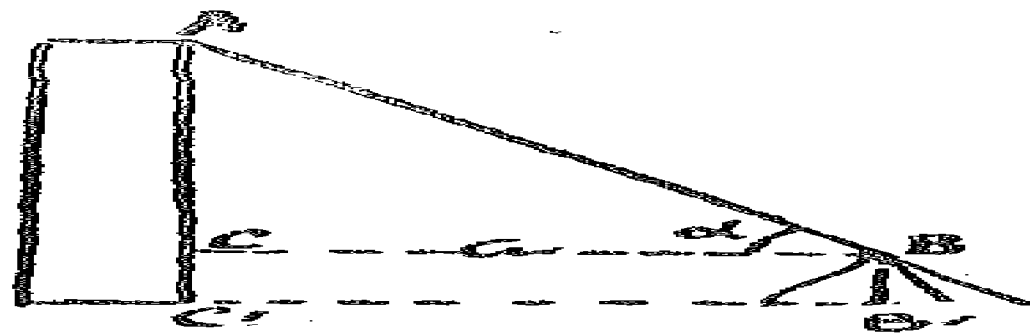
۵ - زاویه بین دو قطر

۳ - استعمال مثلثات در نقشه برداری

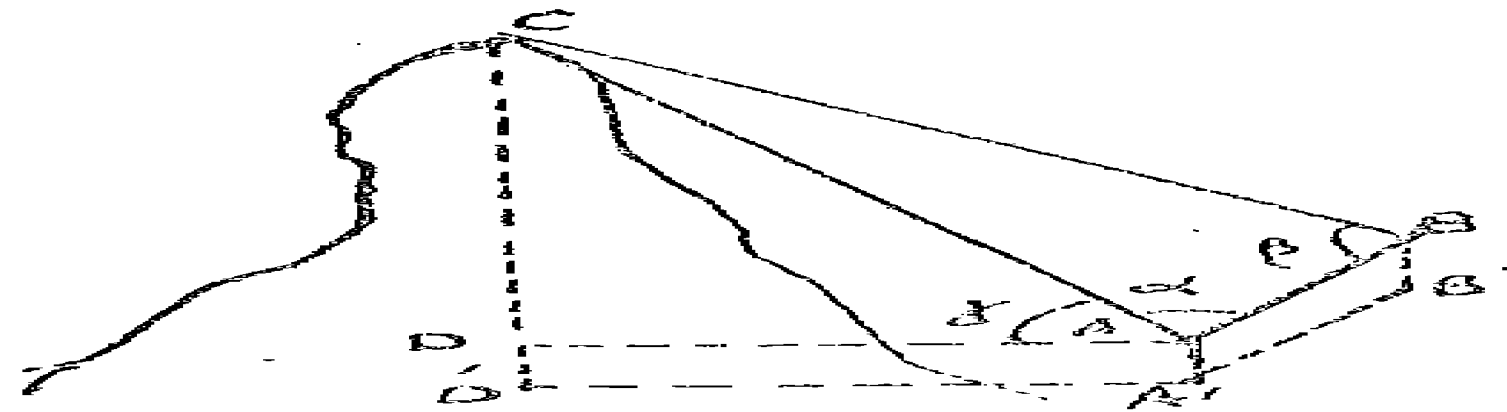
۵۷ - در نقشه برداری از يك قطعه زمین میتوان طول خطوط و مقدار زوایا را بازنجیر مساحی و زاویه یاب و افزار دیگر اندازه گرفت. ولی برای مراعات دقت زمین را بمثلثهای متعدد تقسیم میکنند و بوسیله حل آن مثلثها اجزاء آن را با کمال دقت اندازه می گیرند. این عمل را مثلث بندی یا Triangulation می گویند.

۵۸ - گاهی نیز اندازه گرفتن فاصله بین دو نقطه که در دسترس نیستند یا اندازه گرفتن ارتفاعی لازم می آید. این مسائل بطریق ذیل حل میشوند.

۵۹ - تعیین ارتفاع - ۱) اگر بموقع قائمی که بر نقطه ای که می خواهیم ارتفاعش را تعیین کنیم دسترسی داشته باشیم (شکل ۳) $B'C' = BC$ را با دقت اندازه گیریم و از حل مثلث ABC ارتفاع نقطه A را بدست می آوریم .
۲) اگر بموقع قائم دسترسی



شکل ۳

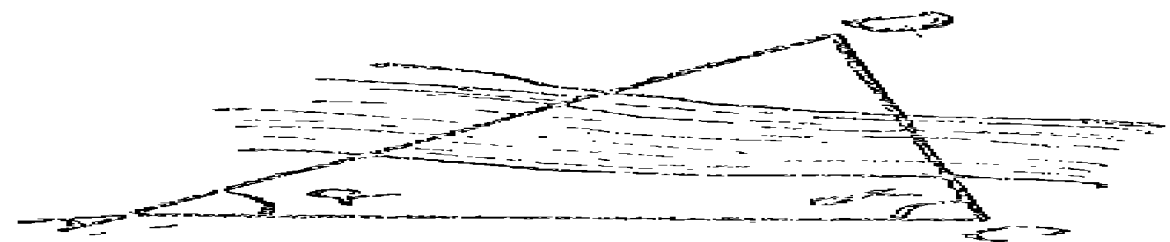


نیباشد (ش ۳) طول AB را در روی زمین مسطحی بدقت اندازه میگیریم و زوایای α و β را هم زاویه یاب تعیین می کنیم؛ از حل مثلث ABC طول AC بدست میآید، آنگاه مثلث قائم CAD را با وتر AC و زاویه

حل میکنیم تا CD (و در نتیجه CD') بدست آید (DD' مساوی ارتفاع زاویه یاب از سطح زمین است)

۶۰ - فاصله نقطه A را از

۱۵۵ در دسترسی نیست معلوم کنیم *

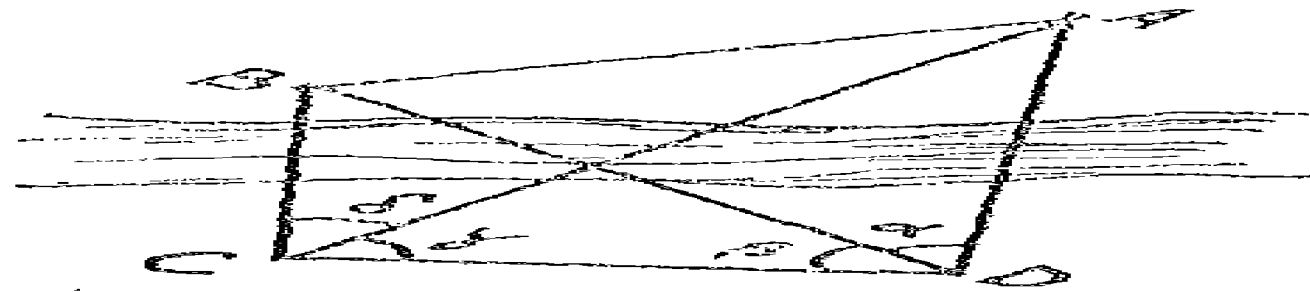


نقطه ای مانند A در خطی گرفته فاصله AC و زوایای α و β (ش ۴) را اندازه میگیریم و مثلث ADC

را حل میکنیم (حالت اول، شماره ۵)

۶۱ - اگر به B و A هیچیک دسترسی نباشد (ش ۵)

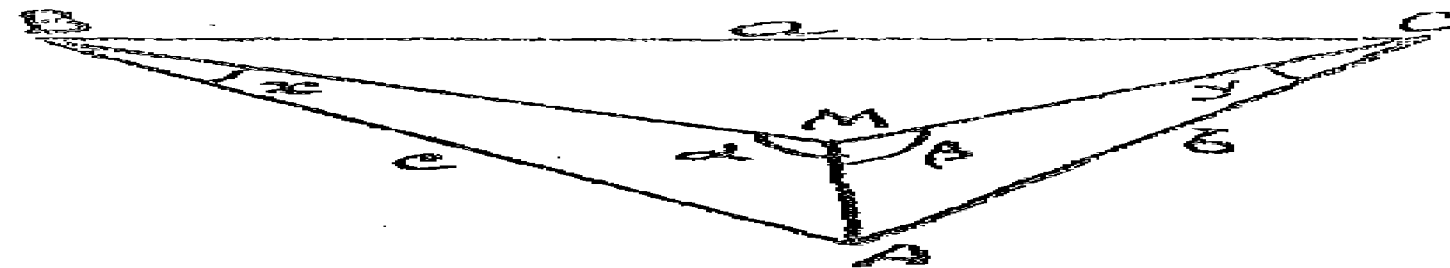
دو نقطه C و D را در خطی گرفته فاصله CD و زوایای α و β و γ را اندازه میگیریم.



شکل ۵

روی نقشه مشخص گردیده اند ، میبخشواهدیم و ضلع نقطه N را در روی نقشه معین نمائیم در صورتیکه میدانیم از N قطعه AB بزائیه α و قطعه AC بزائیه β دیده میشود (ش ۶)

براه هندسی میتوان این مسئله را حل کرد باین معنی که در روی نقشه بر AB و CD بترتیب قطعه دایره های حاوی زوایای α و β را رسم نمود تا از نقاط اشتراک نقطه N بدست آید .



شکل ۶

T نگاه بکماک CD و T و M طول AC و بکماک AM و β و δ طول BC را حساب میکنیم و از حل مثلث ACB (حالت دوم ، شماره ۵۲) AB را بدست میآوریم

۶۲- مسئله نقشه - مواضع سه نقطه اصلی A و B و C

براه مثلثاتی باید MA و MB (و MC) را حساب کرد - برای این کار از معلوم بودن اجزاء مثلث ABC استفاده میکنیم .
دو مثلث AMB و AMC :

$$\frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta} \end{array} \right.$$

$$\alpha + \beta = 2\pi - \alpha - \beta = A$$

از دستگاه اخیر β و α حساب میشوند و از حل مثلثهای AMB و AMC میتوان MB و MC را تعیین کرد و M را بدست آورد.

پایان

۱ تعاریف

- ۱ - جسم چیزی است که قسمتی از فضا را اشغال کند . مقدار آن از فضا را که جسم اشغال میکند میگویند آنست ، فصل مشترک دو سطح یا حد هر جسم را سطح ، فصل مشترک دو خط یا حد هر خط را نقطه گویند .
- ۲ - خط مستقیم ساده ترین خطها و نامحدود است .
- ۳ - صفحه یا سطح مستوی ساده ترین سطوح و آن نیز نامحدود است .
- ۴ - دو خط یا دو صفحه موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکند .
- ۵ - دایره خط منحنی بسته ایست که همه نقاطش از یک نقطه بنام مرکز یااصلی ثابتی بنام شعاع باشند .
- ۶ - حتماً عبارتست از بیان یک فرض و یک مستطیل حاصل از آنها و دایره ای که بی دلیل واضح باشد . اصل موضوع حکمیست که تعبد ایندیرفته شود . قضیه حکمیست که اثباتش محتاج باقامه برهان باشد .

- ۷ — حقایق هندسی مبتنی بر سه اصل ذیل هستند :
- (۱) برد و نقطه فقط يك خط میگذرد (۲) از يك نقطه فقط يك خط موازی خط دیگر میگذرد (اصل موضوع اقلیدس) .
- (۳) هر شکل را میتوان در صفحه یا فضا جایجا کرد بی آنکه در آن تغییری پیدا شود .
- ۸ — مکان هندسی عبارتست از مجموع نقاطی که همه يك خاصیت هندسی داشته باشند .

II — زوایا و خطوط عمود بر هم

- ۹ — زاویه یا گوشه قسمتی از صفحه است که بین دو نیم خط متقاطع محصور باشد . نقطه تلاقی دو خط را **قارص** یا **راس** و هر خط را **پهلوی یا ضلع** گویند . هر دو نیم خط با یکدیگر دو زاویه میسازند، آنرا **ک**، **کوچکتر است** (و معمولاً مراد از زاویه همانست) **گوثر** یا **محد** میبود دیگری را **گاو** یا **مقعر** گویند (ش ۱)



ش ۱

- ۱۰ — ممکنست در صفحه جهت مثبت و منفی قائل شد . مثلاً جهت دوران عقربه های ساعت را منفی و جهت مخالف دوران عقربه ها را مثبت فرض کرد . در اینصورت زاویه هم مثبت یا منفی تواند بود . اگر يك ضلع برای اینکه ضلع دیگر نزدیک شود در جهت مثبت دوران کند زاویه مثبت است و گرنه منفی (در ش ۱ ony)

منفی و α مثبت است).

۱۱ — قضیه — از يك نقطه فقط ميتوان يك عمود بر خطی رسم کرد.

۱۲ — نتیجه — خطوط عمود بر يك خط با هم موازی است.

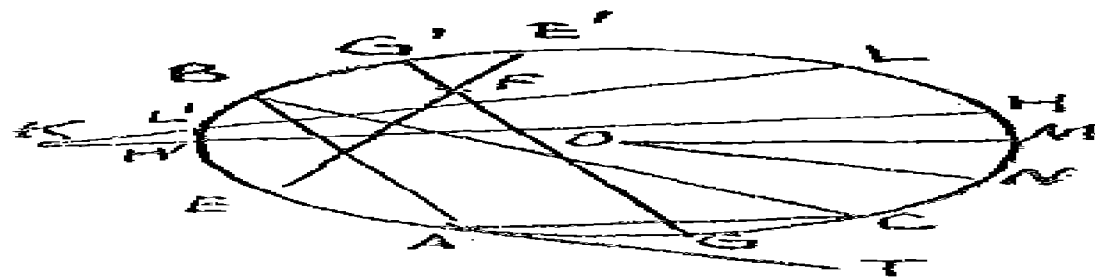
۱۳ — اندازه زاویه — زاویه را با درجه و گراد و رادیان اندازه میگیرند. (رجوع شود به قسمت مثلثات ، شماره ۲ ، صفحه ۱۲۹)

۱۴ — دو زاویه مجاور يك ضلع مشترك دارند . در زاویه مجاور که اضلاع غیر مشتركشان بر يك امتداد باشند مجانب نام دارند . دو زاویه متقابل اند که اضلاعشان بر يك استقامت باشند .

۱۵ — اگر دو زاویه مجانب با هم برابر باشند هر يك را قائمه یا راست و ضلع مشتركشان را بر ضلع دیگر عمود مینامند . زاویه کوچکتر از قائمه را تند یا حاده و بزرگتر از آنرا باز یا منفرجه میگویند .

۱۶ — دو زاویه را که مجموعشان يك قائمه باشد متهم و دو زاویه را که مجموعشان دو قائمه باشد مکمل گویند .

۱۷ — هر گاه دایره ای در نظر گرفته شود : زاویه مرکزی آن است که تار کش بر مرکز دایره



(ش. ۲)



۲۱- اگر دو خط Δ_1 و Δ_2 را خط سوم D قطع کند (ش ۳) هشت زاویه حادث میشود:

دو زاویه غیر مجاور را که در یک طرف D باشند متقابل و دو زاویه را که در دو طرف D باشند متبادل

گویند؛ دو زاویه را که بین Δ_1 و Δ_2 باشند درونی و زاویه های خارج Δ_1 و Δ_2 را بیرونی نامند.

۲۲- قضیه - اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند دو زاویه متبادل همنام باهم برابرند.

۲۳- قضیه عکسی - اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه متبادل همنام باهم برابر باشند دو خط اول یا یکدیگر موازیند.

۲۴- حالات برای برتری زوایا
قضیه - دو زاویه که اضلاعشان با یکدیگر موازی باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دو زاویه که اضلاعشان بر یکدیگر عمود باشند برابر یا مکملند.
قضیه - دو زاویه متقابل برآس باهم برابرند.

III چند برها

۲۵- شکل حادث از تقاطع چند خط را چگون بسط گویند. هر خط را یک ضلع یا وجه و محل تقاطع دو ضلع را

تارک یا رأس می‌نامند. اگر امتداد هیچیات از اضلاع شکل را قطع نکند چند بر را گوئد و گرنه گاو نامند. چند بر منظم آنست که همه زوایایش باهم و همه اضلاعی باهم مساوی باشند. زاویه بین هر دو ضلع يك زاویه درونی و آنکه بین يك ضلع و امتداد ضلع دیگر باشد زاویه بیرونی نام دارد. دو چند بر منظم يك نقطه می‌توان یافت که از همه اضلاع بيك فاصل باشد، این نقطه را مرکز می‌نامند. خطی را که از مرکز بر یکی از اضلاع عمود شود ارتفاع *Apothème* میگویند.

مجموع طولهای اضلاع محیط یا پیرامون است. قطر خطی است که دو تارک غیر مجاور را بهم ربط دهد.

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای درونی چند بر n ضلعی $(2n-4)$ قائمه است.

۲۷ - - قضیه - مجموع زوایای بیرونی هر چند بر چهار قائمه است.

۲۸ - قضیه - تعداد اقطار چند بر n ضلعی $(\frac{n(n-3)}{2})$ است.

۲۷ مثلث

۲۹ - مثلث ساده‌ترین چند برهاست. اگر دو ضلع آن مساوی باشند متساوی‌الساقین و هر يك از دو ضلع مساوی را ساق و اگر هر سه ضلع متساوی باشند متساوی‌الاضلاع است.

اگر يك زاویه آن قائمه باشد قائم است و ضلع مقابل بر او به قائمه را و ترگویند . میانه خطی است که از رأس به وسط ضلع مقابل وصل شود . ارتفاع عمود است که از رأس بر ضلع مقابل فرود آید . عمود منتهی به خطی است که بر وسط يك ضلع عمود گردد .

دایره محیطی آنست که بر سه رأس بگذرد . دایره محیطی بر سه ضلع مماس میباشد . دایره محیط خارج هر ضلع آنست که بر آن ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس باشد . ۳۰ - قراارداد . در این کتاب هر زاویه مثلث را با يك حرف بزرگ و ضلع مقابل آنرا با همان حرف ولی كوچك میخوانیم .

ارتفاعات وارد بر اضلاع a و b و c را h_a و h_b و h_c ؛ میانههای آن اضلاع را m_a و m_b و m_c ؛ شعاع دایره محیطی را R ، از آن دایره محیطی را r و اشعه دایره محیط بر اضلاع a و b و c را r_a و r_b و r_c و مساحت مثلث را S مینامیم .

در سه بر مشاوع الساقین رأس مشترك دوساق را A نام میگذارند و آنرا بطور مطلق رأس میگویند . در مثلث قائم رأس زاویه قائمه را A مینامند . محیط مثلث یعنی $a+b+c$ را $2p$ میگویند .

۳۱ - قضیه - مجموع زوایای مثلث ۲ قائمه است .
 ۳۲ - قضیه - در مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع و

بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر .

$$c > b + a \quad b > c + a \quad a > b + c$$

۳۳ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین برآس A

$$\angle A = 120^\circ \quad \angle B = \angle C = 30^\circ$$

۳۴ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین میانه های وارد بر دوساق با هم برابرند ؛ همچنین ارتفاعهای وارد بر ساقها و نیمساز گوشه های مجاور دوساق .

۳۵ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه قاعده و نیمساز زاویه رأس هم هست .

۳۶ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع :

$$a = b = c \quad \text{و} \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

۳۷ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع سه ارتفاع با هم

مساویند .

حالات برابری مثلثها

۳۸ - قضیه - دو مثلث در این حالات با هم برابرند :

(۱) اگر دو ضلع و زاویه بین آنها در آن دو مثلث نخلیر بنخلیر

مساوی باشند .

(۲) اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در آن دو مثلث نخلیر بنخلیر

مساوی باشند .

(۳) اگر سه ضلع آنها نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

(۴) اگر دو ضلع و زاویه مقابل بضمع بزرگتر در آن دو مثلث

نخلیر بنخلیر مساوی باشند .

۴۹ - قضیه - اوساط اضلاع مثلث ، مواضع ارتفاعات وارد براضلاع ووسط هرقطعه ازارتفاع واقع بین رأس و محل تلاقی ارتفاعات نه نقطه اند واقع برروی يك دایره (دایره نه نقطه) .

تناسب و تشابه

۴۰ - قضیه طالسی - خطی که موازی يك ضلع مثلث رسم شود دوضلع دیگر را بر يك نسبت قطع میکند .
 به گسی - خطی که دوشنم مثلث را بقطعات متناظر متناسب تقسیم کند موازی ضلع سوم است .
 ۴۱ - قضیه - خطی که اوساط دوضلع مثلث را بهم ربط دهد موازی ضلع سوم و مساوی نصف آنست .
 ۴۲ - هر دو مثلث - دوشکل را مشابه یا همانند گویند وقتی که اضلاع متناظرشان متناسب و زوایای متناظرشان متساوی باشند .

۴۳ - قضیه - دوسه بر دراین احوال باهم مشابهند :

۱ - وقتی دو زاویه یکی نظیر بنظیر یا دو زاویه دیگری برابر باشند :

$$\angle A = \angle A' \quad \text{و} \quad \angle B = \angle B'$$

۲ - يك زاویه یکی با يك زاویه دیگری مساوی بوده و اضلاع آن دو زاویه یا یکدیگر متناسب باشند :

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{و} \quad \angle A = \angle A'$$

۳ - سه ضلع آنها متناسب باشند .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

۴ - دو ضلعشان متناسب و زاویه مقابل ضلع بزرگتر در

هر دو مساوی باشد .

۵ - اضلاعشان به ترتیب بر هم عمود یا با هم موازی باشند

خواص منصف زاویه

۴۴ - قضیه - منصف (نیمساز) هر زاویه داخلی ضلع

مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم میکند .

۴۵ - قضیه - همچنین نیمساز هر زاویه بیرونی .

۴۶ - قضیه - محل برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی

با یک ضلع مثلث نسبت بدو انتهای این ضلع مزدوج توانایی

یکدیگر کنند . (یعنی اگر نقاط مذکور AM و AN و دو رأس

را B و C بنامیم :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MB'}{MC'}$$

۴۷ - قضیه - در دو مثلث مشابه ، ارتفاعات وارد بر

ضلعهای متناظر ، نیمسازهای زوایای متناظر و سایر خطوط

متناظر مانند شاعهای دوا بر محیطی و محیطی بر نسبت مشابه

دو شکلند .

۴۸ - قضیه - مساحات دو مثلث که یک زاویه مساوی

داشته باشند بر نسبت حاصلضربهای اضلاع آن زاویه است .

۴۹ - قضیه - در دو مثلث مشابه مساحات بر نسبت مربع اضلاع متناظرند .

۵۰ - قضیه - در هر مثلث مربع ضلع متقابل بر اوویه حاده (منفرجه) مساویست با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای (یا اضافه) دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در تصویر بر ضلع دیگر بر آن

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 - 2c \cdot BH'$$

(ش ۳ و ۴)

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 + 2c \cdot BH'$$



(ش ۳ و ۴)

۵۱ - قضیه - مجموع مربعات دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع نصف ضلع سوم با اضافه دو برابر مربع میانه وارد بر این ضلع است .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد محیط دایره ایست که مرکز آن بر وسط خط واصل بین نقاط مفروض واقع است .

۵۲ - قضیه - تفاضل مربعات دو ضلع مثلث مساویست بدو برابر حاصلضرب ضلع سوم در تصویر همین ضلع بر خود آن .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصل از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد خطی است عمود بر خط

واصل بین آن دو نقطه .

۵۳ - قضیه استوارت Stewart - اگر نقطه D بر روی ضلع BC از سه بر ABC اختیار گردد :

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot DB.$$

روابط بین اجزاء مختلف مثلث :

۵۴ ارتفاعات :

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

قطعاتی از اضلاع که بوسیله ارتفاعات جدا میشوند :

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \text{و} \quad H'C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$CH' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad \text{و} \quad H'A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{و} \quad H'B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

۵۵ — منصف زاویه‌ها - فرض می‌کنیم AD و BD' و

CD'' سه منصف زاویه‌های داخلی و AD, و BD', و CD'',

منصف‌الزاویه‌های خارجی مثلث ABC باشند :
 اولاً طول قطعاتی از اضلاع که بوسیله منصف‌الزاویه
 های داخلی جدا شده‌اند عبارتند از :

$$DC = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$DA = \frac{bc}{c+a} \quad \text{و} \quad CD' = \frac{ab}{c+a}$$

$$D'B = \frac{ca}{a+b} \quad \text{و} \quad AD'' = \frac{bc}{a+b}$$

ثانیاً طول قطعات هر یک از اضلاع جدا شده بوسیله
 منصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتند از :

$$D_1C = \frac{ab}{b-c} \quad \text{و} \quad D_1B = \frac{ac}{b-c}$$

$$D'_1A = \frac{bc}{c-a} \quad \text{و} \quad D'_1C = \frac{ab}{c-a}$$

$$D''_1B = \frac{ac}{a-b} \quad \text{و} \quad D''_1A = \frac{bc}{a-b}$$

ثالثاً طول هر یک از منصف‌الزاویه‌های داخلی عبارتند از

$$AD = \sqrt{bc \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right]} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

$$BD' = \sqrt{ca \left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right]} = \frac{2}{c+a} \sqrt{cap(p-b)}$$

$$CD'' = \sqrt{ab \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right]} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

رایباً طول هریک از منصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتست از :

$$AD_1 = \sqrt{bc \left[\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 \right]} = \frac{a}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$BD_1' = \sqrt{ca \left[\frac{b^2}{(c-a)^2} - 1 \right]} = \frac{b}{c-a} \sqrt{ca(p-c)(p-a)}$$

$$CD_1'' = \sqrt{ab \left[\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right]} = \frac{c}{a-b} \sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

— میانه‌ها — ۵۶

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}$$

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

۵ = دایره‌های محیطی، محیطی و محیط خارج

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$$

$$= \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{4S}{a+b+c}$$

شعاع دایره محیط خارج

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره مماسی:

a	p	قطعه بین رأس A و نقطه تماس
b	p	» » »
c	p	» » »

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره مماس خارج:

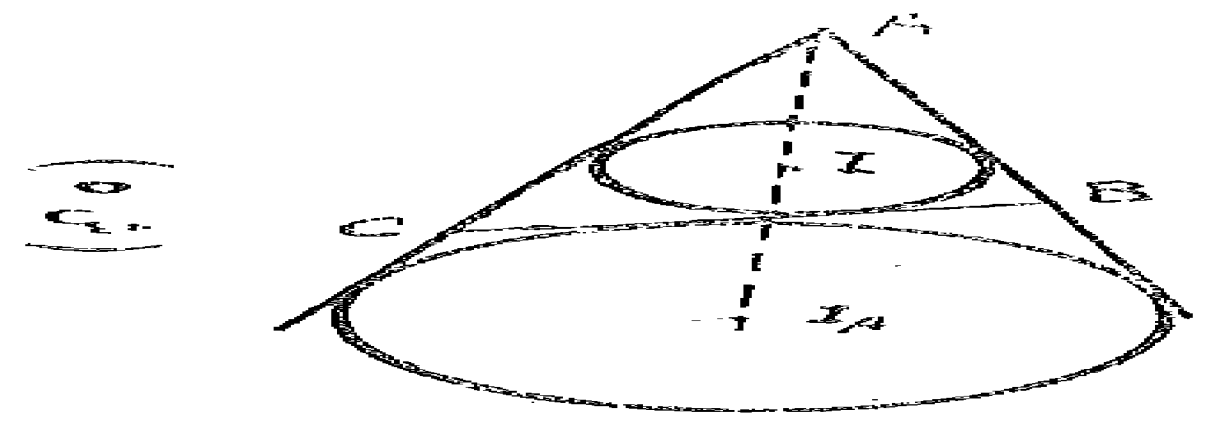
a	p	قطعه بین A و دایره مماس خارج
b	p	» » »
c	p	» » »

قطعاتی بر روی منصف زاویه رأس A که بین مراکز دایره و رأس A معصورند: (ش ۵)

$$AI = \sqrt{bc \cdot \frac{p-a}{p}}$$

$$AI_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$$

۵۸ — قضیه حاصل ضرب دو ضلع مثلث مساویست با (۱) حاصل ضرب قطعاتی که منصف زاویه درونی بر روی ضلع سوم جدا میکند، یا اضافه مربع این منصف زاویه ۲) یا حاصل ضرب قطعاتی که منصف زاویه بیرونی بر روی ضلع مقابل جدا میکند، منهای مربع این منصف زاویه.



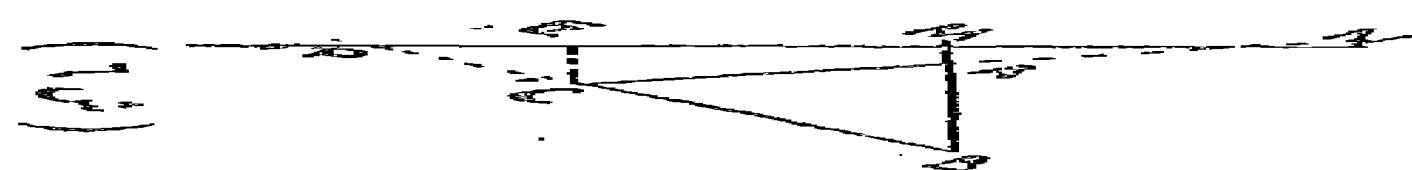
۵۹ — قضیه — مواقع منصف زوایای خارجی مثلث سه نقطه اند واقع بر يك استقامت .

موربات

۶۰ — قضیه مثلاًثوس — هرگاه مورب \triangle سه ضلع مثلث ABC (یا امتداد آنها) را در M و N و P قطع کند (ش ۶)

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$$

۶۱ — قضیه سهوا — هرگاه سه رأس مثلث ABC را



به نقطه O واقع در صفحه آن وصل نموده امتداد دهیم تا اضلاع مقابل را در M و N و P قطع کنند (ش ۷)

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$



۷ چهار بر (یا چهار ضلعی)

۶۲ — چهار برهای مهم — هر چهار بری که هر دو ضلع مقابل آن با یکدیگر موازی باشند متوازی الاضلاع است . در متوازی الاضلاع هر ضلع را میتوان قاعده دانست و عمودی را که از رأس مقابل بر آن فرود آید ارتفاع مینامند . راستگوشه یا مستطیل متواری الاضلاعی است که يك زاویه آن قائمه باشد ؛ لوزی یا مهین متوازی الاضلاعی است که دو

ضلع مجاورش با هم مساوی باشند . هر ربع مستطیلی است که لوزی هم باشد . ذی زفقه شکلی است که دو ضلع آن با هم موازی ، و دو ضلع دیگرش ناموازی باشند ؛ دو ضلع موازی را دو قاعده و عمود مشترک بین آنها را ارتفاع ذوزنقه گویند . چهار بر محیطی آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار راسش گذراند . چهار بر محیطی آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار ضلعش مماس کرد . هر گاه اضلاع مقابل چهار بر $ABCD$ یکدیگر را در E و F قطع کنند شکل $ABCDEF$ را یک چهار بر کامل مینامند .

متوازی الاضلاع

۶۳ - قضیه - در متوازی الاضلاع (۱) هر دو ضلع مقابل با هم مساویند . (۲) دو قطر منصف یکدیگرند . (۳) دوزاویه مقابل با یکدیگر مساویند . (۴) دو زاویه مجاور محکمه یکدیگرند .

۶۴ - قضیه عکسی - اگر در چهار بری (۱) هر دو ضلع با هم مساوی و موازی باشند ؛ (۲) دو قطر منصف هم باشند ؛ (۳) دوزاویه مقابل با یکدیگر مساوی باشند ؛ (۴) دوزاویه مجاور محکمه هم باشند ؛ شکل متوازی الاضلاع است .

۶۵ - قضیه - محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع مرکز تقارن شکل است .

۶۶ - قضیه - مساحت متوازی الاضلاع مساویست به حاصل ضرب قاعده در ارتفاع .

لوزی

- ۶۷ - قضیه - در لوزی دو قطر برهم عمودند .
- ۶۸ - قضیه - اگر در متوازی الاضلاع دو قطر برهم عمود باشند شکل لوزیست .
- ۶۹ - قضیه - اگر دو قطر چهار بری برهم عمود و منصف هم باشند شکل لوزیست .
- ۷۰ - قضیه - هر يك از دو قطر لوزی يك محور تقارن شكل است .
- ۷۱ - قضیه - مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطر .
- مستطیل و مربع
- ۷۲ - قضیه - در مستطیل دو قطر با يكديگر برابرند .
- ۷۳ - عكسی قضیه - اگر دو قطر متوازی الاضلاع مساوی باشند شكل مستطیل است .
- ذوزنقه
- ۷۴ - قضیه - خطی كه اواسط دو ساق (اضلاع ناموازی) ذوزنقه را بهم وصل كند موازی قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است .
- ۷۵ - قضیه - در ذوزنقه متساوی الساقین : ۱) زوایای مجاور بهر قاعده برابرند . ۲) دو قطر باهم مساویند .
- ۷۶ - قضیه - خطی كه از محل برخورد دو قطر ذوزنقه موازی قاعده رسم شود بوسیله دو ساق بسو جزء مساوی

تقسیم میشود .

۷۷ - قضیه - مساحت ذوزنقه مساویست با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع دو قاعده .

چهار بر محیطی

۷۸ - قضیه - در چهار بر محیطی مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر .

۷۹ - معکوس قضیه - اگر مجموع دو ضلع مقابل یک چهار بر گوی مساوی مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن برداشته است .

چهار بر محیطی

۸۰ - قضیه - در چهار محیطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند .

۸۱ - اگر در چهار بر محیطی اضلاع را به ترتیب a, b, c, d و اقطار را m و n و محیط را p بنامیم :

قضیه بهایوس :

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

$$m \cdot n = ac + bd$$

$$m = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{مساحت}$$

$$S = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \quad \text{شعاع دایره محیطی}$$

چهار بر کامل

۸۶ - قضیه Gauss - اوساط قطر چهار بر کامل بر یک امتدادند .

۸۷ - قضیه پاپوس - در هر چهار بر کامل هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توانقی تقسیم میشود .

IV چند برهای منتظم

۸۸ - تهریم - در چند بر منتظم همه اضلاع با هم و همه زوایا با هم برابرند .

۸۹ - قضیه - چند بر منتظم قابل محاط شدن در دایره و محیط شدن بر دایره است .

۹۰ - قضیه - هرگاه محیط دایره را به n جزء مساوی تقسیم نماییم : ۱) از وصل کردن نقاط تقسیم n بر منتظم محاطی بدست میآید ۲) از تقاطع مماسهایی که بر نقاط تقسیم n بدست میآید بدست میآید ۳) اگر نقاط تقسیم را m به m وصل کنیم 11 بر منتظم کوکبی حاصل میشود تعداد چند برهای منتظم 11 کوکبی مساویست با همه اعداد کوچکتر از $\frac{n-1}{2}$ که نسبت به m اول باشند .

هرگاه ضلع n بر محیطی را C_n و از آن n بر محیطی را A_n و شعاع دایره را R و عمودی را که از مرکز چند بر محیطی برضلع فرود میآید (یعنی ارتفاع $apothème$) را a بنامیم این روابط را خواهیم داشت :

۸۸ - محاسبه $C_{\gamma n}$ بر حسب C_n :

$$C_{\gamma n} = \sqrt{R (\gamma R - \sqrt{\varepsilon R^2 - C_n^2})}$$

۸۸ - محاسبه A_n بر حسب C_n :

$$A_n = \frac{\gamma R C_n}{\sqrt{\varepsilon R^2 - C_n^2}}$$

۸۹ - محاسبه $A_{\gamma n}$ بر حسب A_n :

$$A_{\gamma n} = \frac{\gamma A_n R}{\gamma R + \sqrt{\varepsilon R^2 - A_n^2}}$$

۹۰ - محاسبه a_n بر حسب C_n :

$$a_n = \frac{\sqrt{\varepsilon R^2 - C_n^2}}{\gamma}$$

۹۱ - ضلع و ارتفاع چند چند بر منتظم :

$$C_{\gamma} = R \sqrt{\gamma}$$

$$a_{\gamma} = \frac{R}{\gamma}$$

۱ - سه بر

$$C_{\varepsilon} = R \sqrt{\gamma}$$

$$a_{\varepsilon} = \frac{R \sqrt{\gamma}}{\gamma}$$

۲ - مربع

۳ - پنج پر

$$C_5 = \frac{R}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad ; \quad a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} + 1)$$

$$C_4 = R \quad ; \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \text{شش پر} :$$

۵ - ده پر :

$$C_{10} = \frac{R}{4} (\sqrt{5} - 1) \quad ; \quad a_{10} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

۶ - پانزده پر :

$$C_{15} = \frac{R}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$$

۹۲ - اگر r شعاع دایره محیطی و a ارتفاع n پر منتظمی که محیطش r' شعاع و a ارتفاع $2n$ پر منتظمی که محیط آن نیز همان r' باشد، بین چهار مقدار a و r و a و r' این دوابط برقرار است :

$$a = \frac{a+r}{2} \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{r(a+r)}{2}}$$

۹۳ - قضیه - مساحت چند پر منتظم برابرست با حاصل ضرب نصف محیط در ارتفاع آن .

۹۴ - قاعده - برای بدست آوردن مساحت چند پر نامنتظم آنرا بوسیله رسم قطر ها بسط پر ها و ذوق نه ها تقسیم میکنیم و مساحت های اجزاء آنرا بیکدیگر میافزائیم .

VII دایره

- ۹۵ - قضیه - هر قطر محور تقارن دایره است .
 ۹۶ - قضیه - خط مستقیم دایره را فقط در دو نقطه قطع میکند .
 تبصره - اگر دو نقطه بر هم منطبق شوند خط را بر دایره مماس گویند .

اوضاع نسبی دو دایره

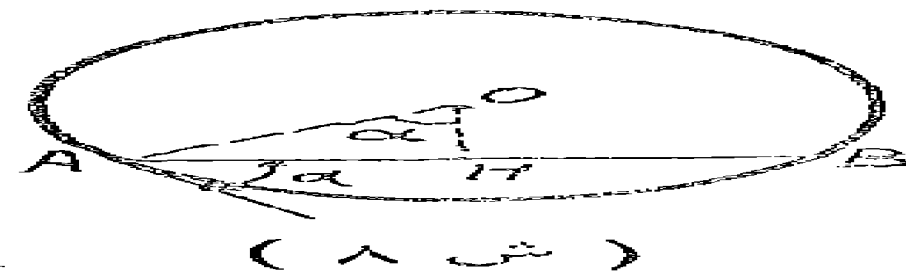
- ۹۷ - دو دایره ممکن است متخارج ، مماس خارج ، متقاطع ، مماس داخل یا متداخل باشند . فاصله مرکز دو دایره را به ترتیب میگویند و به d نمایش میدهند .
 ۹۸ - قضیه در دو دایره متخارج
 $d > R + R'$ « « مماس خارج
 $d = R + R'$ « « متقاطع
 $R - R' < d < R + R'$ « « مماس داخل
 $d = R - R'$ « « متداخل
 $d < R - R'$

- ۹۹ - قضیه - در دو دایره مماس بر هم خط الم مرکزین از نقطه مماس میگذرد .
 ۱۰۰ - قضیه - در دو دایره متقاطع خط الم مرکزین بر وتر مشترک عمود است .

اندازه زاویه

- ۱۰۱ - برای زاویه های مرکزی ، مماسی ، ظلی ، داخلی و مقیاس آنها رجوع شود به شماره ۱۷

- ۱۰۲ - قوسیه در یک دایره یا ذوایر مساوی قوسهای مساوی مقابلند بزوایای مرکزی مساوی و بعکس .
- ۱۰۳ - مسئله - بر قطعه AB دایره حاوی زاویه α (شماره ۱۷) را مرور دهید .



کافیست AC را چنان رسم کنیم که با AB زاویه α را بسازد (ش ۸) عمودی که از A بر AC اخراج شود عمود منصف AB را در O قطع میکند . مرکز O و شعاع دایره معلوم است .

قوس و وتر

- ۱۰۴ - قوسیه - هر وتر کوچکتر است از قطر .
- ۱۰۵ - قوسیه - دو انتهای قطری که بر یک نقطه میگذرد دوردترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت به آن نقطه اند .
- ۱۰۶ - قوسیه - در یک دایره وترهای مساوی مقابلند بقوسهای مساوی .
- ۱۰۷ - قوسیه - ۱) دو وتر مساوی از مرکز دایره بیرون فاصله اند . ۲) از دو وتر نامساوی آنکه بزرگتر نزدیکتر است بزرگتر است .
- عکس قوسیه هم صحیح است .
- ۱۰۸ - قوسیه - قطر عمود بر وتر و قوس مقابل آنرا نصف میکند .

۱۰۹ - قضیه - مماس بر دایره بر شعاع نقطه تماس عمود است.

۱۱۰ - قضیه - هر خطی که بر انتهای شعاعی عمود باشد بر دایره مماس است.

۱۱۱ - رسم مماس بر دایره (۱) اگر نقطه NI بر دایره باشد بر انتهای شعاعی که بر آن نقطه بگذرد خطی عمود باید کرد. (۲) اگر نقطه NI بیرون دایره و O مرکز دایره باشد قطر OM دایره ای میکشیم تا دایره مقروض را در T و T' قطع کند. MT و MT' جوابهای مسئله اند. (۳) اگر مماس باید موازی امتداد \triangle باشد از مرکز دایره عمودی بر \triangle فرود میآوریم تا دایره را در دو نقطه قطع کند و بر آن دو نقطه دو مماس میکشیم.

۱۱۲ - قضیه - هر خطی که بر دو دایره مماس باشد مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره یکطرفه مماس باشند مماسی مشترک خارجی است و اگر دو طرفه مماس باشند مماسی مشترک داخلی.

۱۱۳ - جدول نمایندگی وضع دو دایره و تعداد مماسهای مشترک

وضع دو دایره	خارج	مماس خارج	مقاطع	مماس داخل	متداخل
تعداد مماسهای مشترک داخلی	۰	۱	۰	۱	۰
« « « « « «	۰	۱	۰	۱	۰
« « « « « «	۰	۱	۰	۱	۰

۱۱۴ - قاعده رسم مماس مشترک خارجی : اگر O و O' مراکز R و R' شعاعهای دودایره $(R \gg R')$ باشند و بقطر OO' يك دایره و بمرکز O و شعاع $R - R'$ دایره دیگری بزنیم تا یکدیگر را در M و M' قطع نمایند ، از O به M و M' وصل میکنیم و از محل تقاطع OM و OM' یا دایره O خطوطی موازی OM و OM' میکشیم؛ این خطوط مماسهای مطلوبند .

۱۱۵ - برای رسم مماسهای مشترک داخلی عیناً مانند حالت قبل عمل میکنیم جز اینکه دایره ای که بمرکز O رسم میکنیم بشعاع $(R + R')$ خواهد بود .

قوت نقطه

۱۱۶ - قضیه - چون دو وتر یکدیگر را در داخل دایره قطع کنند حاصلضرب دو قطعه یکی برابر است با حاصلضرب دو قطعه دیگری .

۱۱۷ - قضیه - هرگاه دو قاطع در بیرون دایره یکدیگر را تلاقی نمایند حاصلضرب هر يك در جزء خارجی آن مساوی است با حاصلضرب قاطع دیگر در قسمت خارجی .
نتیجه - اگر از يك نقطه قاطع و مماس بر يك دایره

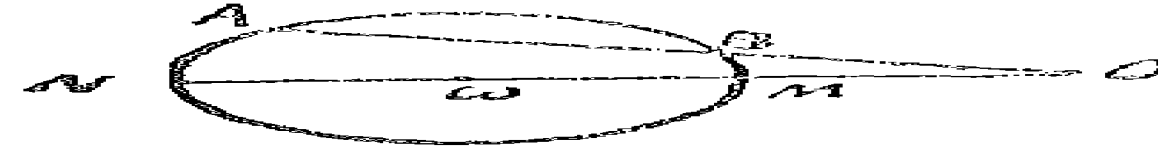
رسم شوند مربع مماس مساویست با حاصلضرب تمام قاطع در جزء خارجی آن .

۱۱۸ - قضیه - اگر بر روی دو خط که در O یکدیگر را قطع کرده باشند چهار نقطه A و B و A' و B' چنان باشند

که $OB^2 = OA^2$. $OB = OA$ باشد آن چهار نقطه بر محیط یک دایره قرار دارند .

۱۱۹ - تهریف - قوت یا توان یک نقطه نسبت به دایره حاصلضرب دو قطعه قاطعی است که

در این نقطه بر دایره رسم شود
(ش ۹)



$P = OA \cdot OB = OM \cdot ON = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$
بحث - اگر O بیرون دایره باشد

$P = d^2 - R^2 = 0$ « « « «

$P = d^2 - R^2 < 0$ « « « «

۱۲۰ - تهریف - محور اصلی دو دایره مکان

هندسی تقاطعی است که نسبت باین دو دایره یک قوه داشته باشند .

۱۲۱ - قضیه - محور اصلی دو دایره خطی است عمود

بر خط المرکزین . اگر فاصله O و O' مراکز دو دایره را d

و شعاعشان را R و R' و موقع محور اصلی بر خط المرکزین

را H بنامیم :

$$OH = \frac{R^2 - R'^2 + d^2}{2d}$$

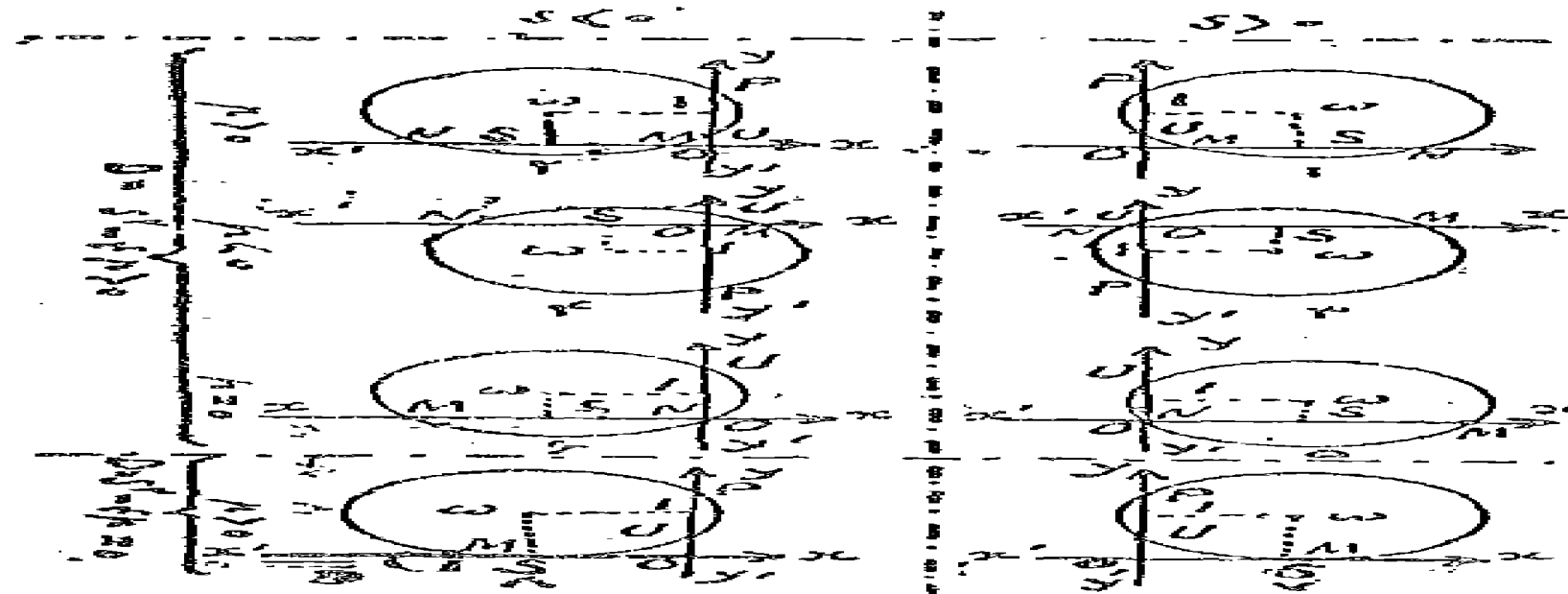
نتیجه - محور اصلی دو ایر متحد المراكز بقاصله بینهایت

دور واقع است .

۱۲۲ - تهریف - چند دایره که یک محور اصلی داشته

باشند يك دسته دایره misceau تشکیل میدهند .
 ۱۲۳ - قضیه سه محورهای اصلی سه دایره که مراکز آنها بر يك امتداد نباشند بر يك نقطه میگذرند . این نقطه را مرکز اصلی سه دایره گویند .

۱۲۴ - حل و بحث معادله درجه دوم . $x^2 + px + q = 0$ رسم میکنیم (ش ۱۰) در روی



$OP = p$ و $OU = 1$ ، Ox روی $OS = \frac{p}{2}$

را جدا میکنیم، عمود عمود منصف PU عمود بر AS که از Ox خارج شود در N قطع میکنند دایره ای که مرکز آن O و شعاع OP رسم شود Ox را در M و N قطع میکنند و OM و ON جواب های معادله اند .

دو دایره عمود بر هم
 ۱۲۵ - تعریف -
 زاویه بین دو دایره
 متقاطع زاویه بین دو

مماس است که از یکی از نقاط تقاطع بر دو دایره رسم شوند .
 دو دایره را که زاویه بین آنها 90° باشد عمود بر هم گویند .

۱۲۶ - قضیه - محور اصلی دودایره مکان مراکز دوایر عمود بر آن دودایره است .

۱۲۷ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دودایره بر هم عمود باشند آنست که قطریکی بوسیله دیگری بمزدوج توافقی تقسیم شده باشد .

۱۲۸ - قضیه - کلیه دوایری که دودایره مخروطی را بزائیه قائمه قطع میکنند بر دو نقطه ثابت واقع بر خط المارکزین آن دودایره میگذرند .

محیط و مساحت دایره

۱۲۹ - قضیه - محیط دایره حد مشترک محیط چند بر محیط بر آن و محیط دایره است وقتی عدد اضلاع این چند برهاها ی بینهایت زیاد شود .

۱۳۰ - قضیه - نسبت محیطهای دودایره مساوی نسبت شمای آنهاست .

۱۳۱ - قضیه نسبت محیط دایره بقطر آنست عددیست ثابت این عدد $3.141592658 \dots = \pi$ است .

(نتیجه - ۱) محیط دایره ای بشعاع R مساویست با $2\pi R$

(۲) طول قوس α درجه مساویست با $R \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi$

۱۳۲ - محاسبه π - بدو طریق ممکنست : (۱) دستور

محیطها که در آن حد محیط چند بر محیطی در دایره ای بشعاع

$\frac{1}{2}$ را پیدا میکنند ، زیرا در دایره ای $\frac{1}{2}$ که

$$C = 2\pi R = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$$

(۲) دستور محیط های برابر (Isvpérimètres) که در آن عکس شعاع دایره ای را که محیطش مساوی ۱ است بدست می آورند ، زیرا در چنین دایره ای

$$\pi = \frac{1}{R} \text{ پس } R = \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

۱۳۳ - قضیه - مساحت دایره مساویست با πR^2

۱۳۴ - تعریف - قطاع دایره قسمتی از دایره است محصور بین يك قوس و دو شعاع . قطعه دایره محصور است بین يك قوس و وتر آن

۱۳۵ - قضیه - ۱) مساحت قطاع مساویست بحاصلضرب قوس آن در نصف شعاع . ۲) مساحت قطعه مساویست بحاصلضرب نصف شعاع در قوس آن بر نصف وتر قوس مضاعف آن قوس .

VIII بردارها

۱۳۶ - تعریف - بردار قطعه خطی است که دارای مقدار و امتداد و جهت معین باشد . دو بردار موازی و مساوی و در يك جهت را همسانگ ، دو بردار همسانگ واقع بر يك خط را همچنانکه یا همادل خوانند . دو بردار موازی و مساوی ولی در دو جهت مختلف را جهت یازوج گویند .

۱۳۷ - مقدار جبری بردار با مساو نیست با طول (آیسیس) منتها منهای طول مبدأ آن .

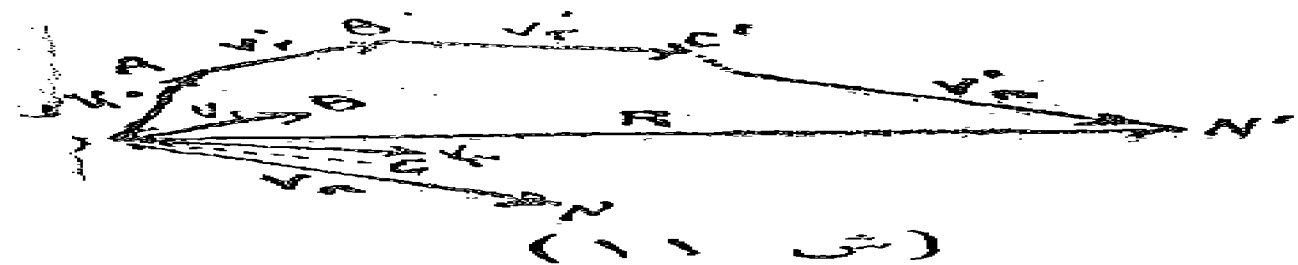
۱۳۸ - قضیه شال - ۱) اگر سه نقطه ثابت A و B و C بر يك امتداد باشند .

$$(AB) + (BC) + (CA) = 0$$

۲) اگر چند نقطه A و B و C و \dots و K و L بر يك امتداد باشند :

$$(AB) + (BC) + \dots + (KL) + (LA) = 0$$

۱۳۹ - برآیند یا مجموع هندسی چند بردار را باینطریق بدست میآورند : از انتهای اولی برداری همسنگ دومی و از انتهای بردار جدید برداری همسنگ سومی و از انتهای این یکی برداری همسنگ چهارمی میکشند و عمل را ادامه میدهند تا همسنگهای تمام بردار های مفروض رسم شوند . آنگاه مبدأ اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل میکنند . این بردار برآیند یا منتهجه یا مجموع هندسی بردارهای مفروض است . (ش ۱۱)

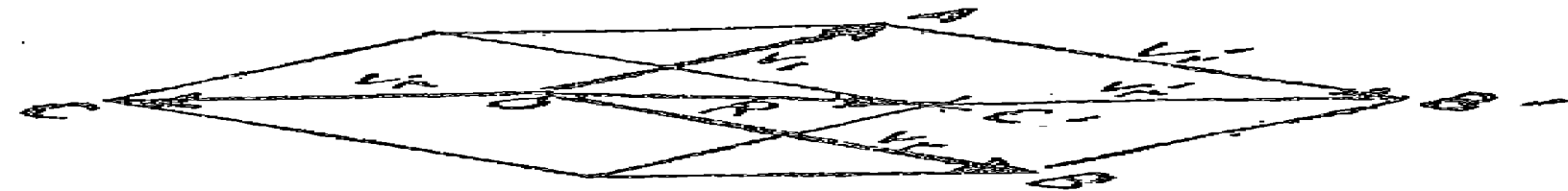


۱۴۰ - قضاصل هندسی دو بردار که يك مبدأ داشته باشند بردار است که منتهای آن دو را بهم ربط دهد .

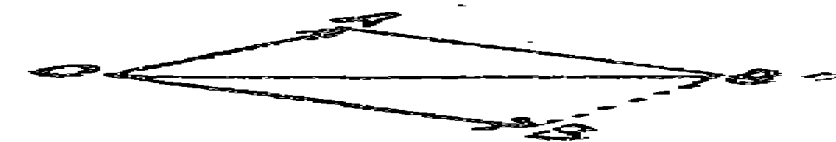
۱۴۱ - برآیند بردارهای غیر واقع در يك صفحه نیز مانند بردارهای واقع در يك صفحه بدست میآید .

حالاتهای خاص - ۱) برآیند دو بردار که يك مبدأ

داشته باشند قطر متوازی الاضلاعیست که بر روی آن دو ساخته شود . (ش ۱۲)
 ۲) بر آیند سه بردار غیر واقع در يك صفحه که يك مبدأ داشته باشند قطر متوازی السطوحی است که آن بردارها سه پال آن باشند (ش ۱۳)



ش ۱۳



ش ۱۲

تصاویر بردارها

۱۴۲ - تعریف - تصویری قائم نقطة A بر يك خط یا يك صفحه موقم عمودی است كه از نقطة بر خط یا صفحه فرود آید .
 ۱۴۳ - قضیه - تصویری بر آیند چند بردار بر آیند تصاویر آن بردارهاست .

IX موریات

۱۴۴ - قضیه منلائوس - رجوع شود بشماره ۶۰
 ۱۴۵ - قضیه سوا - « « « ۶۱
 ۱۴۶ - قضیه پاسکال - در هر شش بر محاطی اضلاع مقابل دو بگوید یگر را در سه نقطة قطع میکنند که بر يك استقامتند

نتیجه ۱) در پنج بر محاطی چهار ضلع دو بدو متناهی یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند که با نقطه تلاقی ضلع سوم بامماس بر رأس مقابلش بر یک استقامتند. ۲) در چهار بر محاطی محل تلاقی دو ضلع با دو نقطه تلاقی دو ضلع دیگر با مماسهای بر رؤس مقابلشان بر یک استقامتند. ۳) در هر سه بر مماس بر دایره محیطی در هر رأس ضلع مقابل را قطع میکند و سه نقطه تقاطع بر یک امتدادند. (ممکنست نقاط تقاطع بی نهایت دور باشند)

۱۴۷ - قضیه دالامبر - شماره ۱۷۲ دیده شود.

× تقسیم توافقی

۱۴۸ - قضیه - در هر روی هر خط فقط دو نقطه M و M' میتوان یافت که قدر مطلق نسبت فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B واقع بر آن خط مساوی عدد ثابت k باشد. نتیجه - با در نظر گرفتن علامت چیری در روی هر خط فقط یک نقطه میتوان یافت که نسبت فواصل آن از A و B مساوی مقدار ثابت چیری k باشد.

$$\frac{MA}{MB} = - \frac{M'A}{M'B} \quad \text{پس}$$

میگیرند M و M' نقطه AB (و B و A نقطه M' و M) را بنسبت توافقی k تقسیم کرده اند.

(۱) اگر O وسط AB باشد: $AO^2 = OM \cdot OM'$

$$(۷) \quad \frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'} = \frac{2}{AB}$$

۱۵۰ — تعریف: اگر چهار نقطه A و B و C و D خطی را بنسبت توافقی تقسیم کنند و از يك نقطه O بآن چهار نقطه وصل کنیم $O-ABCD$ را يك دسته اشعه توافقی و هر يك از خطوط OA و $...$ را يك شعاع توافقی مینامند.

۱۵۱ — قضیه — هر خط که موازی يك شعاع توافقی باشد یوسيله سه شعاع دیگر بدو جزء مساوی تقسیم میشود.

۱۵۲ — قضیه — هر خط که يك دسته اشعه توافقی را قطع کند بهمین نسبت توافقی تقسیم میشود.

XI تقارن

۱ — تقارن مرکزی

۱۵۳ — (۱ — ۱) قرینه هر نقطه M نسبت بنقطه O نقطه M' است که با O و M بر يك امتداد بوده و $OM' = OM$ باشد. O را مرکز تقارن میگویند. (۲) قرینه هر شکل نسبت بمركز O شکلی است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۴ — (قضیه — ۱) قرینه مرکزی هر قطعه خط موازی و مساوی و در جهت مخالف آنست. (۲) قرینه مرکزی هر زاویه مساوی و در جهت موافق آنست. (۳) قرینه مرکزی هر شکل (چند بر) شکلی (چند بری) مشابه آنست.

۱۵۵ — هر کز تقارن يك شكل به اگر در شكلي نقطه ای بتوان یافت که قرینه هر نقطهٔ شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود آن نقطه را مرکز تقارن شكل میگویند، مانند مرکز دایره و محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع،

۴ — تقارن محوری

۱۵۶ — (تقریباً ۱) قرینه يك نقطه نسبت بخط \triangle نقطه M' است که با M بر روی خطی عمود بر \triangle بوده و فاصله آن از \triangle مساوی فاصله M از این خط باشد. \triangle را محور تقارن گویند. ۲) قرینه محوری هر شكل نسبت به محور \triangle شكلي است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شكل اول باشد. ۱۵۷ — (قضیه ۱) قرینه محوری هر قطعه خط قطعه خطی است مساوی آن که امتدادش محور را با امتداد آن قطعه خط در يك نقطه قطع میکند. ۲) قرینه محوری هر زاویه زاویه ایست مساوی و در جهت مخالف آن. ۳) قرینه محوری هر شكل شكلي است مساوی آن ولی غیر قابل انطباق بر آن.

۱۵۸ — محور تقارن هر شكل (در صورت وجود) خطیست که قرینه هر نقطه از شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود. مانند قطر دایره و قطر لوزی.

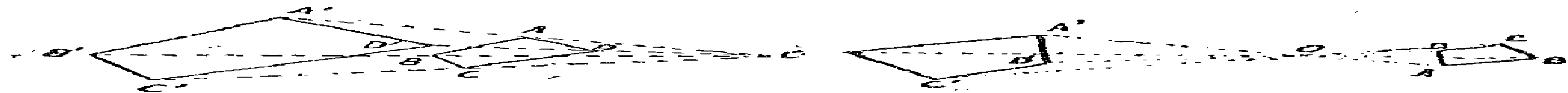
۱۵۹ — قضیه — اگر شكلي دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد محل تلاقی آن دو محور، مرکز تقارن شكل است.

XII تشابه

- ۱۶۰ - تعریف - دو شکل را مشابه یا هم‌شکل گویند وقتی که زوایای متناظرشان متساوی و اضلاع متناظرشان متناسب باشند .
- ۱۶۱ - برای تشابه در مثلث راجوع شود به شماره های ۴ تا ۴۳
- ۱۶۲ - قضیه - خطوط موازی بر روی دو خط غیر مشخص قطعات متناسب جدا میکنند .
- ۱۶۳ - قضیه - در دو شکل مشابه مساحات بر نسبت مربعات دو خط متناظر میباشند .
- ۱۶۴ - قضیه - همواره دو چند بر مشابه را میتوان بیک عدد مثلثهای مشابه و متشابه الوضخ تجزیه کرد .

XIII تجانیس

- ۱۶۵ - تعریف - دو شکل F و F' را متجانس هم گویند وقتی که هر دو نقطه متناظر M و M' آنها با نقطه ثابت O ، موسوم به مرکز تجانیسی ، بر یک امتداد بوده و نسبت $\frac{MO}{M'O}$ مساوی مقدار ثابت k ، موسوم به نسبت تجانیسی ، باشد . اگر F و F' در یک طرف O باشند $k > 0$ و تجانیسی هم‌عقیم است (ش ۱۴) و اگر در دو طرف O باشند $k < 0$ است و تجانیسی هم‌کوس (ش ۱۵)



ش ۱۵

ش ۱۶

- ۱۶۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دو شکل میچانس باشند اینست که هر دو خط متناظر متوازی بوده نسبتشان مساوی نسبت میچانس باشد .
- ۱۶۷ - قضیه - میچانس خط مستقیم خطی است مستقیم .
- ۱۶۸ - قضیه - میچانس دایره دایره است .
- ۱۶۹ - قضیه - دو دایره در عین حال میچانس مستقیم و ممکوس یکدیگرند .
- ۱۷۰ - قضیه - مماسهای بر نقاط متناظر در دو منتهی متجانس یا یکدیگر موازیند .
- ۱۷۱ - قضیه - دو شکل F^1 و F^2 که میچانس شکل سوم F باشند میچانس یکدیگرند و سه مرکز میچانس آنها بر روی يك خط مستقیم واقعند .
- ۱۷۲ - قضیه - سه دایره دو دایره دارای شش مرکز میچانسند . (۱) سه مرکز میچانس مستقیم بر يك امتدادند . (۲) هر مرکز میچانس مستقیم یا دو مرکز میچانس ممکوس بر يك استقامتند .

XIV تغییر مکان در سطح

۱۷۷۳- تغییر مکان در هرگاه بر طبق قاعده مشخص و معینی بازاء هر نقطه M از شکل F نقطه‌ای مانند M' در صفحه شکل بدست آوریم شکل F' حادث از مجموع نقاط M' را میگویند از تغییر مکان F حاصل شده است و آنرا مبدل یا تبدیل یافته F میگویند.

تغییر مکان ممکنست در اجزاء شکل تغییر دهد، مانند تعجانی؛ یا در آنها تغییری ندهد، مانند انتقال و دوران. در این نوع تغییر مکانها تبدیل یافته شکل بوسیله یک لغزش در روی صفحه میتواند بر شکل اصلی منطبق شود.

۱۷۷۴- قضیه - در تغییر مکانهای که در آنها شکل تغییر نمیکند وضع جدید دو نقطه برای مشخص کردن وضع جدید شکل کافیست.

انتقال

۱۷۷۵- هرگاه بردار (AB) مقروض باشد و بازاء هر نقطه M از شکل F نقطه M' را بدست آوریم بطوریکه (MM') همسنگ (AB) باشد گوئیم شکل F' حاصل از مجموع نقاط M' ، از انتقال شکل F باندازه (AB) بدست آمده است. بردار (AB) را که نماینده و مشخص انتقال است بردار انتقالی گویند.

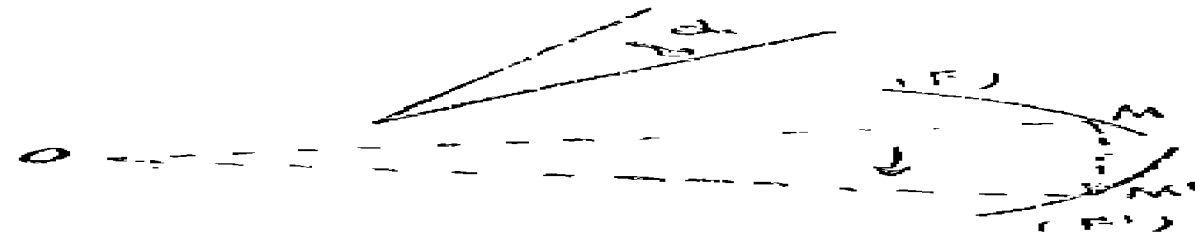
۱۷۷۶- قضیه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۱۷۷ - قضیه - در انتقال دو بردار متناظر همسنگ هستند .
 بعکس اگر در تغییر مکانی دو بردار متناظر همسنگ باشند
 تغییر مکان انتقال است .

۱۷۸ - قضیه - تغییر مکان حاصل از چند انتقال ، انتقال
 است . بردار انتقال اخیر برآیند بردارهای انتقالهای مفروض
 است .

دوران

۱۷۹ - تعریف - هر گاه زاویه α و نقطه O (ش ۱۵)



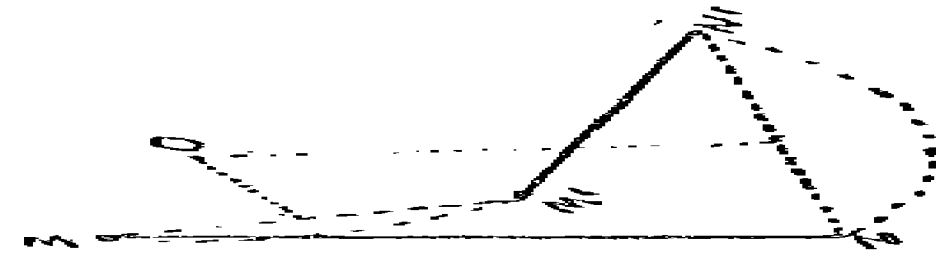
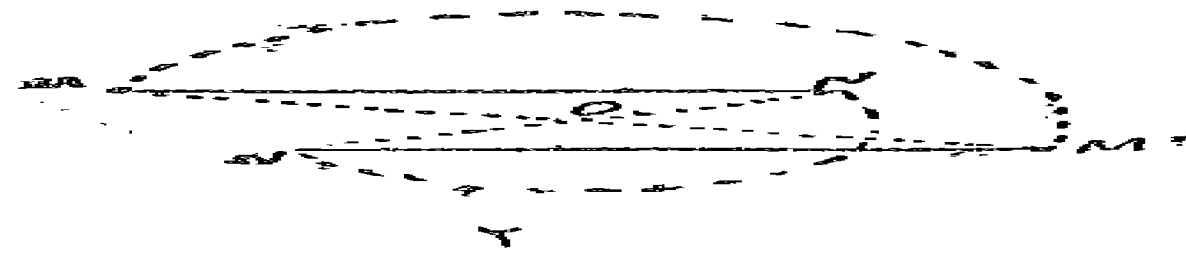
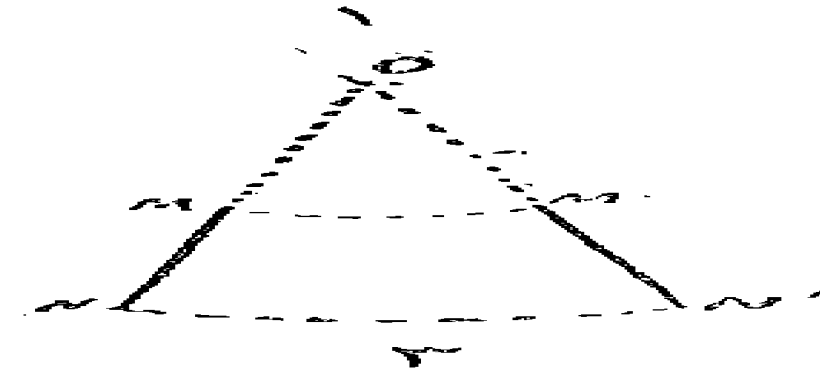
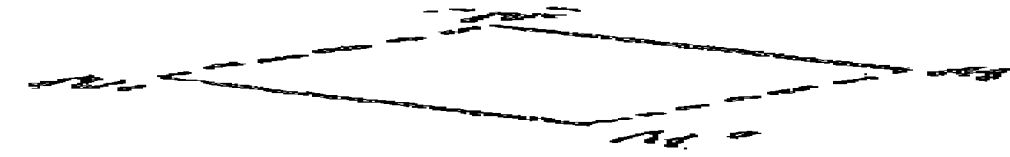
ش ۱۵

مفروض باشند و بازاء هر نقطه M
 از شکل F نقطه M' را چنان بدست
 آوریم که $OM' = OM$ و
 $M'O = OM$ باشد مجموع نقاط
 M' شکل F' را تشکیل میدهند .
 میگویند F' از دوران F باندازه
 α و در جهت سهم بدست آمده است .

۱۸۰ - قضیه - دوران اجزاء شکل را تغییر نمیدهد .
 ۱۸۱ - قضیه - هر تغییر مکان در صفحه که در اجزاء
 شکل تغییر ندهد يك انتقال یا يك دوران خواهد بود . (ش ۱۶ ،
 ۱ و ۲ و ۳ و ۴) (در صفحه بعد)

XV خط و صفحه

۱۸۲ - صفحه نامحدود است و فقط را بدو ناحیه تقسیم



ش ۱۶

۴

میکنند. پس خطی که از يك ناحیه بناحیه دیگر برود ناچار
 صفحه را قطع میکند.
 ۱۸۳ = وضع خط نسبت به صفحه - خط ممکنست :
 (۱) در صفحه باشد. (۲) با صفحه موازی باشد. (۳) صفحه را
 قطع کند.
 ۱۸۴ = قضیه - بر يك خط و يك نقطه فقط يك
 صفحه میگذرد.
 ۱۸۵ = نتیجه - صفحه ممکنست یوسيله (۱) نقطه ،
 (۲) يك خط و يك نقطه ، (۳) دو خط متقاطع یا متوازی ،

مشخص شود .

۱۸۶ - وضع دو خط ℓ و ℓ' دو خط ممکنست : ۱) در یک صفحه باشند ، در این صورت یا متقاطعتند یا متوازی . ۲) در یک صفحه نباشند (متناظر)

۱۸۷ - قضیه - یک خط ℓ را می توان یک خط ℓ' موازی آن را رسم کرد .

۱۸۸ - قضیه - اگر یکی از دو خط موازی صفحه ای را قطع کنند ، دیگری نیز آن صفحه را قطع میکند .

۱۸۹ - قضیه - دو خط موازی با خط سوم یا یکدیگر موازیند .

۱۹۰ - قضیه - خطی که موازی یک خط از صفحه ای باشد با صفحه موازیست .

نتیجه - از یک نقطه خطوط بیشتر از یک صفحه رسم میشوند .

۱۹۱ - قضیه - اگر بر خط \triangle که موازی صفحه P است صفحه ای بگذرانیم فصل مشترک دو صفحه موازی \triangle است .

۱۹۲ - قضیه - خطی که موازی دو صفحه باشد با فصل مشترکشان موازیست .

۱۹۳ - قضیه - فصل مشترک دو صفحه که بر دو خط موازی بگذرند با آن دو خط موازیست .

۱۹۴ - قضیه - فصل مشترک دو صفحه خطیست مستقیم .

- ۱۹۵ - قضیه - هرگاه سه صفحه یکدیگر را دو بسو قطع کنند سه فصل مشترك یا متقاربند یا متوازی .
- ۱۹۶ - قضیه - فصل مشترك هر صفحه یا دو صفحه متوازی دو خط متوازی است .
- ۱۹۷ - قضیه - از يك نقطه میتوان فقط يك صفحه بسازات صفحه مفروض رسم کرد .
- ۱۹۸ - قضیه - دو صفحه موازی یا يك صفحه یا یکدیگر موازی است .
- ۱۹۹ - قضیه - از يك نقطه میتوان خطوط بیشمار موازی يك صفحه رسم کرد . مکان هندسی آنها صفحه ایست موازی صفحه اول .
- تذکره - ۱) خطی که با یکی از دو صفحه متوازی موازی باشد با دیگری هم موازی است . ۲) خطی که یکی از دو صفحه متوازی را قطع کند ، دیگری را هم قطع میکنند .
- ۲۰۰ - قضیه - دو قطعه موازی هم معصور بین دو صفحه متوازی با یکدیگر برابرند .
- ۲۰۱ - قضیه - صفحات متوازی بر روی خطوط قطعيات متناسب جدا میکنند .
- ۲۰۲ - تعریف - زاویه بین دو خط متناظر زاویه ایست که بین دو خط متقاطع متوازی با آنها حادث شود .
- ۲۰۳ - قضیه - دو زاویه که اضلاعشان موازی باشند متساویست .
- ۲۰۴ - تعریف - خطی را بر صفحه ای عمود گویند وقتی

که بر همه خطوط آن عمود باشد .
 ۲۰۵ - قضیه - خطی که بر دو خط از صفحه‌ای عمود باشد
 بر صفحه عمودست .

(نتیجه - ۱) خطی که بر یکی از دو صفحه متوازی عمود
 باشد بر دیگری هم عمودست . (۲) اگر یکی از دو خط متوازی
 بر صفحه‌ای عمود باشد دیگری هم عمودست .

۲۰۶ - قضیه - از يك نقطه فقط يك صفحه عمود بر يك
 خط میتوان کشید .

(نتیجه - ۱) دو صفحه عمود بر يك خط متوازی‌اند . (۲) از
 يك نقطه و در فضا خطوط بیشمار عمود بر يك خط میتوان رسم
 کرد ، همه در يك صفحه‌اند .

۲۰۷ - قضیه - همه نقاط واقع بر صفحه‌ای که بر وسط
 قطعه خطی عمود باشد از دو انتهای قطعه بيك فاصله‌اند .
 ۲۰۸ - قضیه - از يك نقطه فقط میتوان يك خط بر
 صفحه عمود کرد .

(نتیجه - دو خط عمود بر يك صفحه متوازی‌اند .

۲۰۹ - قضیه سه عمود - اگر \triangle بر صفحه‌ای عمود
 باشد و از موقع آن در صفحه خطی عمود بر يك خط D واقع
 در صفحه رسم کنیم و موقع این عمود را M بنامیم ، خطوط واصل
 از M به نقاط مختلف \triangle همه بر D عمودند . و بعکس . . .

۲۱۰ - قضیه - اگر از نقطه O يك عمود و چند مایل بر
 صفحه‌ای رسم کنیم : (۱) مواضع مایلهای متساوی از موقع عمود

بيك فاصله اند . و بعكس ۲) از دو مایل نامساوی موقع آنكه بزرگترست از موقع عمود دور ترست . و بعكس

۲۱۱ - (تهریف ۱) فاصله نقطه از خط طول عمود است كه از آن نقطه بر آن خط فرود آید ۲) فاصله دو خط متناظر طول عمود مشترك آنهاست .

۲۱۲ - چند مسئله مهم - ۱) رسم عمود مشترك D و \triangle - بر \triangle صفحه ای موازی D میگذرانیم، از يك نقطه D خطی بر این صفحه عمود میکنیم، از موقع عمود D' را موازی D میکشیم تا \triangle را در نقطه O قطع کند . از O خطی موازی عمود رسم مینمائیم، این خط عمود مشترك است ۲) باید از O خطی موازی صفحه P رسم کرد تا خط \triangle را قطع کند - بر O صفحه ای موازی P میکشیم تا \triangle را در M تلاقی کند . OM جواب مسئله است . ۳) باید خطی موازی D رسم کرد تا \triangle و \triangle' را قطع کند - بر \triangle و \triangle' دو صفحه موازی D میگذرانیم، فصل مشترکشان جواب مسئله است . ۴) باید بر يك نقطه خطی گذرانند كه دو خط را قطع کند - بر آن نقطه و هر يك از دو خط صفحه ای مرور میدهیم فصل مشترکشان جواب مسئله است .

XXVI فرجه ها

۲۱۳ - فضای محصور بین دو صفحه متقاطع را فرجه ، هر صفحه را يك روی فرجه ، فصل مشترك دو صفحه را بالی ،

زاویه حادث مابین فصل مشترکهای دوروی فرجه را با صفحه‌ای عمود بر یال مسطحه فرجه می‌گویند. صفحه منصف فرجه، فرجه‌های قائم، تند، باز، مجاور، مجانب، متمم، مکمل و جهت فرجه مساوی القاط مشابیه خود را در روایا دارند.

۲۱۴ - قضیه - مسطحه‌های فرجه‌های متساوی متساوینند.

۲۱۵ - قضیه - دو فرجه متساوی بر نسبت مسطحه‌های

خود هستند.

(نتیجه - ۱) مقیاس فرجه با مسطحه آن یکی است.

۲۱۶ - قضیه - هر صفحه که بر يك خط از صفحه‌ای

عمود باشد بر آن صفحه عمودست.

(۲) برای اندازه گرفتن فرجه‌ها و ابعادهای زوایا بکار میرود

۲۱۷ - قضیه - فصل مشترك دو صفحه عمود بر صفحه

سوم بر این صفحه عمودست.

نتیجه - صفحه‌ای که بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشد

بر آنها عمود است.

۲۱۸ - هرگاه اضلاع زاویه‌ای بر دوروی فرجه‌ای عمود

باشند آن زاویه مکمل فرجه است.

تصویر در صفحه

۲۱۹ - تصویر نقطه موقع عمودیت که از نقطه بر صفحه

خروج آید.

تصویر يك شکل حادث از مجموع تصاویر نقاط

مختلف آنست.

۲۲۰ - قضیه - تصویر خط مستقیم خطیست مستقیم.

۲۲۱ - قضیه - تصاویر خطوط متوازی متوازی‌اند.

- ۲۲۲ - قضیه - ۱) اگر يك ضلع زاویه قائمه ای با صفحه تصویر موازی باشد تصویر آن هم قائمه است - ۲) اگر تصویر زاویه ای که يك ضلعش با صفحه تصویر موازیست قائمه باشد اقلا يك ضلع آن با صفحه تصویر موازیست .
- ۲۲۳ - میل خط نسبت به يك صفحه زاویه بین خط و تصویرش بر آن صفحه است . شیب خط ظل (تانوانت) میل آن میباشد .
- ۲۲۴ - قضیه - میل خط کوچکترین زاویه بین آن خط و خطوط صفحه است .
- ۲۲۵ - قضیه - مسطحه يك فرجه بزرگترین زاویه ایست که اضلاعش بترتیب در دوروی فرجه واقعند .
- تهریف - خطی را که در يك روی فرجه عمود بریال رسم شود خط بزرگترین شیب آن صفحه نسبت به روی دیگری فرجه گویند .
- ۲۲۶ - قضیه - ۱) طول تصویر خط مساویست به طول خود آن ضرب در جیب تمام میلش . ۲) مساحت تصویر يك شكل مسطح مساویست با حاصل ضرب مساحت آن شكل در جیب تمام زاویه حادث بین صفحه شكل و صفحه تصویر .

XVII تقارن درفضا

- ۲۲۷ - تقارن نسبت به يك نقطه - M' را قرینه M نسبت به مرکز تقارن () گویند وقتی که O وسط MM' باشد .
- ۲۲۸ - تقارن نسبت به يك خط - M' را قرینه M

نسبت بمحور تقارن \triangle گویند وقتی که \triangle در صفحه‌ای عمود بر وسط MM' باشد.

رجوع شود به تقارن در صفحه (شماره های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۲۲۹ - تقارن نسبت بیک صفحه - M' را قرینه M نسبت به صفحه P گویند وقتی که P بر وسط MM' عمود باشد.

۲۳۰ - دو شکل نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه قرینه یکدیگرند وقتی که جمیع نقاط یکی قرینه نقاط دیگری باشد. اگر در شکلی نقطه‌ای، خطی یا صفحه‌ای بتوان یافت که قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه، خط یا صفحه همچنان بر خود شکل واقع گردد آنهارا مرکز یا محور یا سطح تقارن شکل گویند.

۲۳۱ - هرگاه اجزاء شکلی را بتوان بر اجزاء شکل دیگری که مساوی آنست منطبق نمود دو شکل مساوی و قابل انطباق هستند والا مساویند اما انطباق ندارند.

۲۳۲ - قضیه - ۱) دو قرینه یک شکل نسبت به یک صفحه و یک نقطه از آن صفحه قابل انطباقند - ۲) دو قرینه یک شکل نسبت بدو مرکز قابل انطباقند - ۳) قرینه‌های یک شکل نسبت بیک صفحه و یک مرکز قابل انطباقند - ۴) همچنین قرینه‌های یک شکل نسبت بدو صفحه - ۵) قرینه مرکزی یک جسم ممکنست بر آن قابل انطباق باشد یا نباشد - ۶) قرینه‌های یک جسم نسبت بیک محور یا یک صفحه بر خود جسم قابل انطباق هستند.

۲۲۳ - قضیه ۱) قرینه هر شکل مستوی نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه با خود آن شکل مساویست - ۲) قرینه یک صفحه، صفحه است ۲) قرینه هر فرجه نسبت بیک صفحه فرجه ایست مساوی با آن اما در جهت مخالف.

۲۲۴ - قضیه ۱) اگر شکلی دو صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک محور تقارن (فصل مشترک دو صفحه) است - ۲) اگر شکلی سه صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک مرکز تقارن (نقطه مشترک سه صفحه) نیز هست.

XVIII - تجانس در فضا

۲۲۵ - تعریف - هرگاه نقطه O بنام مرکز تجانسی و عدد λ بنام نسبت تجانسی داده شده باشند مجانسی هر شکل F نسبت به O شکل F' است بطوریکه هر دو نقطه متناظر M و M' از آنها با O بر یک امتداد باشند و $\frac{OM'}{OM} = \lambda$ باشد. هرگاه M و M' در یک طرف O باشند (λ مثبت باشد) F' مجانس مستقیم F و اگر M و M' در دو طرف O باشند (λ منفی باشد) مجانس معکوس آن میباشد.

۲۲۶ - قضیه ۱) مجانس یک قطعه خط خطی موازی آنست که اگر مجانس مستقیم باشد با آن در یک جهت است و اگر معکوس باشد در جهت مخالف. ۲) زاویه بین دو خط مساوی زاویه بین مجانسهای آنهاست.

(۳) معجاناتس خطی که بر مرکز بگذرد بر خود آن خط منطبق است .

(۴) معجاناتس صفحه مستوی صفحه مستویست .
 ۲۳۷ - قضیه - (۱) مساحات دو شکل معجاناتس بر نسبت مربع دویال متناظر آنهاست .
 (۲) حجمهای دو شکل معجاناتس بر نسبت مکعب دویال متناظر آنهاست .

۲۳۸ - قضیه - هر گاه شکل F مرکز تقارن داشته باشد معجاناتس آن F' نیز مرکز تقارنی خواهد داشت . در این صورت F و F' در عین حال معجاناتس مستقیم و معجاناتس معکوس یکدیگرند و اگر مراکز تقارن آنها را C و C' و مراکز تعجاناتس مستقیم و معکوسشان O و O' و نسبت تعجاناتس را λ بنامیم :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O'C'}{O'C} = \lambda$$

۲۳۹ - قضیه - اگر F' و F'' معجاناتسهای F با نسبتهای λ و λ' باشند معجاناتسهای یکدیگر با نسبت $\frac{\lambda'}{\lambda}$ نیز هستند .

۲۴۰ - قضیه - (۱) اگر سه شکل دو بدو متعجاناتس باشند سه مرکز تعجاناتس بر يك خط بنام محور تعجاناتس واقعند .
 (۲) اگر چهار شکل دو بدو متعجاناتس باشند شش مرکز تعجاناتس در يك صفحه ، بنام صفحه تعجاناتس ، واقعند . چون هر سه شکل از این چهار شکل يك محور تعجاناتس دارند چهار شکل چهار محور تعجاناتس خواهند داشت که اضلاع يك چهار بر کاملند و رؤس چهار بر کامل شش مرکز تعجاناتس چهار شکل میباشند .

قبصره - اگر چهار شکل که مرکز تقارن دارند دو بدو مجانس یکدیگر باشند هر دسته سه تایی آنها چهار محور تجانس (يك محور تجانس مستقیم و سه محور تجانس معکوس) دارند ؛ پس دستگاه چهار شکل شانزده محور تجانس دارند که چهار به چهار در هشت صفحه مشخص واقع میباشند .

XIX - تشابه در فضا

۲۴۱ - جسمی را مشابه جسم دیگر گویند که بامجانس مستقیم آن مساوی باشد . نسبت دو یال متناظر را نسبت تشابه مینامند .

۲۴۲ - قضیه - در دو جسم متشابه (۱) فرجه های متناظر با هم برابرند ؛ (۲) یالهای متناظر بر يك نسبتند ؛ (۳) وجوه متناظر چند بر های متشابهند .

۲۴۳ قضیه - دو چند روی متشابه را میتوان همواره بچند چهار وجهی متشابه و متشابه الوضیع تجزیه نمود .

۲۴۴ - قضیه - نسبت مساحات دو جسم مشابه مساوی نسبت مربع اضلاع متناظر و نسبت حجمهایشان مساوی نسبت مکعب اضلاع متناظرشان میباشد .

XX - تغییر مکان در فضا

رجوع شود بشماره های ۱۷۳ تا ۱۸۱

۹ - انتقال

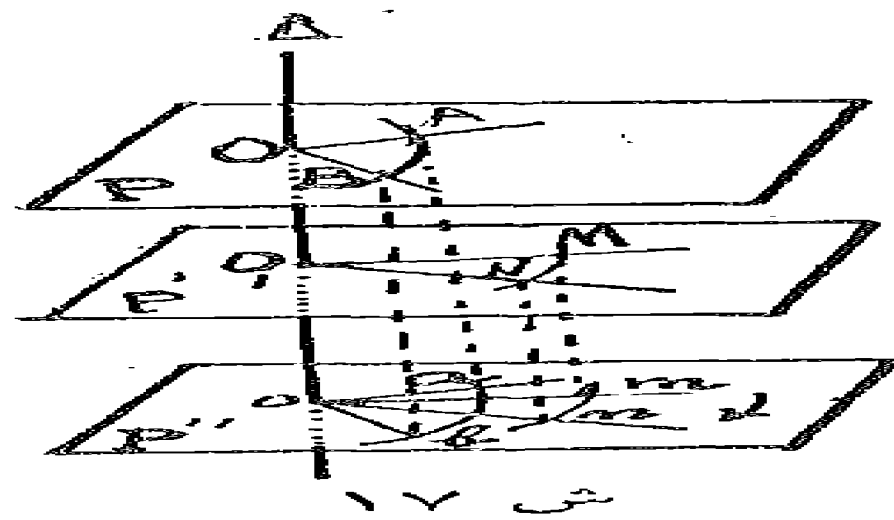
۲۴۵ - قضیه - اگر در تغییر مکان در فضا سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد جسمی بر روی سه خط مساوی و مساوی و یکجهت تغییر مکان دهند جسم حرکت انتقالی کرده است و بردار انتقال مساوی و در جهت تغییر مکان یکی از آن سه نقطه است.

نتیجه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۲۴۶ - چند انتقال را در فضا میتوان بیک انتقال تبدیل کرد - بردار این انتقال مساوی برآیند بردارهای انتقالهای جزء میباشد.

۴ - دو و آن

۲۴۷ - تعریف - اگر سه صفحه موازی P و P' و P'' (ش ۱۷) فرض نمائیم (۱) دو زاویه AOB و MO, N که در دو صفحه P و P' واقعند و رؤسشان بر روی خط OO عمود بر صفحات قرار دارند، در يك جهت هستند اگر تصاویر شان بر روی صفحه P'' در يك جهت باشند (۲) و نیز دو قوس واقع در صفحات P و P' که مراکز شان در روی خطی عمود بر صفحات باشد در



ش ۱۷

يك جهتند و وقتی تصاویرشان بر روی I^{22} در يك جهت باشند .
 ۲۴۸ - قضیه - هر گاه شکلی حول محوری دوران کند تصاویر تمام نقاط آن بر روی صفحه عمود بر محور در يك جهت و بزوایای متساوی دوران مینمایند .

۲۴۹ - قضیه - هر گاه شکلی در فضا تغییر مکان دهد بطوریکه سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد آن بر روی سه صفحه متوازی سه قوس متساوی و در يك جهت بپیمایند و مراکز سه قوس در روی خطی عمود بر این صفحات واقع باشند شکل در فضا دوران کرده است و خطی که بر مراکز قوسها میگذرد محور دوران است .

۴ - محور گیت مار پوچی

۲۵۰ - قضیه - هر تغییر مکان هر شکلی که بر روی کره رسم شده باشد ممکنست تبدیل بدوران در حول یکی از قطر های کره شود .

۲۵۱ - قضیه - هر تغییر مکان در فضا که در اجزاء شکل تغییر ندهد منجر بیک انتقال و يك دوران میشود .

۲۵۲ - هر یک از تغییرات محور گیت مار پوچی مینامند و يك انتقال بموازات محور دوران شود .

XXXI چند روها ، منشور ، هرم

۲۵۳ - تعریف - چند رو یا کثیرالوجوه جسمی است که از هر طرف بسطوح مستوی محدود شده باشد . قسمتی از

هر صفحه محدود به حدود جسم را يك رو یا فرجه ، فصل مشترك دو رو را یال ، فصل مشترك دو یال را راس ، فرجه بین هر دورو را يك فرجه جسم میگویند . چند روی گویا آنست که مقطع هر صفحه در آن چند بر گوژ باشد . چند روی منتظم آنست که همه روهایش باهم و همه فرجههایش باهم مساوی باشند . چندروهای منتظم را اجسام افلاطونی میگویند .

۲۵۴ - قضیه اول - اگر s عده روس ، a عده یالها و f عده روهای يك چند روی گوژ باشند $2 + s = a + f$.
 ۲۵۵ - قضیه - اجسام افلاطونی منحصر به پنج هستند : چهار روی منتظم (۴ راس و ۶ یال) ، هشت رو (۶ راس و ۱۲ یال) ، بیست رو (۱۲ راس و ۳۰ یال) . در این سه جسم هر دو سه بر است ؛ مکعب که هر روی آن مربع است و ۸ راس و ۱۲ یال دارد ؛ دوازده رو که هر روی آن پنج بر است و ۲۰ راس و ۳۰ یال دارد .

۲۵۶ - تعریف - سطح منشوری آنست که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بموازات خود تغییر مکان دهد و بر يك چند بر متکی باشد پدید آید . منشور قسمتی از فضا محصور بین يك سطح منشور و دو صفحه مستوی است ، اگر صفحه ها موازی نباشند منشور ناقص ، اگر صفحه ها بر مولد عمود باشند منشور قائم است . مقطع هر صفحه عمود بر مولد منشور را مقطع قائم گویند .

سطح هرم سطحی است که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بر نقطه ثابتی بگذرد و بر محیط چند بری

متکی باشد بدید آید. قسمتی از فضا محصور بین چنین سطحی بایک صفحه مستوی راهرم میگویند. درهرم منتظم همه روها سه برهای متساوی الساقین متساویند.

هرم ناقص از قطع کردن یک هرم بایک صفحه بدید میآید. درهرم منتظم ارتفاع هر سه برجانبی و درهرم ناقص منتظم ارتفاع هر دو زنقه جانبی را سه هم میگویند.

۲۵۷ - قضیه - فصل مشترک صفحات متوازی با سطح منشوری چند برهای متساویند.

۲۵۸ - قضیه - سطح بدن منشور مساویست بحاصل ضرب محیط مقطع قائم دریال.

۲۵۹ - قضیه - هرگاه سه روی یکی از کنجهای منشوری با سه روی یکی از کنجهای منشور دیگر متساوی و متشابه الی وضع باشند دو جسم متساویند.

۲۶۰ - قضیه - ۱) در متوازی السطوح: رویهای مقابل موازی و مساوی یکدیگرند. ۲) چهار قطر یکدیگر را در یک نقطه قطع میکنند. ۳) این نقطه مرکز تقارن جسم است.

۲۶۱ - قضیه - هر منشور مایل معادل منشور قائمی است که قاعده اش مقطع قائم و ارتفاعش یال آن باشد.

۲۶۲ - قضیه - ۱) حجم دو مکعب مستطیل که یک یال مشترک داشته باشند بر نسبت حاصل ضرب دو یال دیگر است. ۲) حجم دو مکعب مستطیل که دو یال مشترک داشته باشند بر نسبت یال سوم است.

۲۶۲۳ - قضیه - ۱) حجم مکعب مستطیل مساویست به حاصلضرب سه یال آن ۲) حجم متوازی السطوح مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع ۳) بطور کلی حجم منشور مساویست به حاصلضرب مقطع قائم در یال (قاعده در ارتفاع) -

۲۶۲۴ - قضیه - در هرم منتظم همه روها باهم برابرند -

۲۶۲۵ - قضیه - هرگاه صفحه‌ای هرم را موازی قاعده قطع کند : ۱) یالها و ارتفاع هرم همه بیک نسبت قطع میشوند؛ ۲) مقطع مشابه قاعده است ۳) نسبت سطح مقطع به سطح قاعده مساوی نسبت مربع دو ضلع متناظر است -

۲۶۲۶ - قضیه - دو هرم که قاعده‌هایشان معادل و ارتفاعشان مساوی باشد معادل یکدیگرند -

۲۶۲۷ - قضیه - هرم سه پهلو $\frac{1}{3}$ منشور سه پهلوئی است که بهمان قاعده و ارتفاع باشد -

نتیجه - حجم هرم مساویست به حاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ ارتفاع

۲۶۲۸ - قضیه - حجم هرم ناقصی بقاعده های B و b و ارتفاع h مساوی $(B + b + \sqrt{Bb}) \frac{h}{3}$ است -

۲۶۲۹ - قضیه - حجم منشور ناقص سه پهلو مساویست به حاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ مجموع سه یال -

۲۷۰ - قضیه - حجم منشور ناقص قائمی که قاعده آن چندین منظم n ضلعی باشد مساویست به حاصلضرب قاعده در طول محور، یعنی خطی که مرکزهای دو قاعده را بهم مربوط میکند -

۲۷۱ - **تهر یف** - شبه منشور جسمی است که دو قاعده آن دو چند بر متوازی و هر يك از وجوه جانبی آن سه بر يك دوزنقه باشد مقطع صفحه ايرا كه يك فاصله از دو قاعده باشد مقطع متوسط گویند .

۲۷۲ - **قضیه** - حجم شبه منشور مساوی است بحاصل ضرب $\frac{3}{4}$ ارتفاع آن در دو قاعده بعلاوه چهار برابر مقطع متوسط

$$V = \frac{h}{4} (B + b + 4m)$$

XXII استوانه ، مخروط ، کره

۲۷۳ - **تهر یف** - سطح دوار از دوران يك خط (راست یا خم) تغییر ناپذیر در حول مستقیمی بنام محور پدید می آید . جسم دوار يك سطح دوار محدود است . مدار دایره ایست از سطح دوار که صفحه اش بر محور عمود و مرکزش بر محور منطبق باشد . نصفه ها گنجهار مقطع سطح دوار است با هر صفحه که بر محور بگذرد . مماس بر سطح دوار خطیست که بر يك منحنی مرسوم بر روی سطح دوار مماس باشد . صفحه مماس بر هر نقطه از سطح دوار مکان هندسی مماسها نیست که از آن نقطه بر خطوط مختلف مرسوم در سطح دوار رسم شوند . قائم بر سطح دوار در هر نقطه بر صفحه مماس عمود است .

سطح استوانی از حرکت مولد بسوازاات خود و متکی بر يك منحنی هادی بوجود می آید . سطح مخروطی از تغییر مکان خطی که همواره بر نقطه ثابتی گذشته بر منحنی هادی متکی باشد پدید میگردد .

سطح **کروی** آنست که جمیع نقاطش از نقطه‌ای بنام **مرکز** بقاصله IR باشند. کره جسمیست محدود بسطح کروی. دایره بزرگ مقطع کره است باصفحه‌ای که بر مرکز آنست بگذرد. مقطع صفحات دیگر دایره کوچک میباشند. فاصله کروی دو نقطه واقع بر روی کره قوسی است از دایره بزرگی که بر آن دو نقطه بگذرد. منطقه قسمتی از سطح کره است محصور بین دو صفحه موازی، فاصله این دو صفحه ارتفاع منطقه است. عراقیه یا عرفچه بین منطقه ایست که يك صفحه آن بر کره مماس باشد. قطعه کروی قسمتی از کره محصور بین دو صفحه موازیست. قاعه قسمتی از سطح کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است؛ زاویه قاعه عبارتست از زاویه بین دو مماس که از نقطه برخورد دو نیمدایره بر آنها رسم شود؛ قوسی قاعه قوسی از دایره بزرگ است که بر فصل مشترک دو نیمدایره قاعه عمود و با آنها محدود باشد. ۱. کلیدل کروی قسمتی از حجم کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است. قطاع کروی جسمیست که از دوران يك قطاع دایره حول قطری از دایره پدید آید. حلقه کروی جسمیست که از دوران يك قطعه دایره حول قطری از کره تولید شود.

۲۷۴- قضیه - همه نصف النهارهای يك سطح دوار با هم مساویند.

۲۷۵- قضیه - ۱) مماسهای بر يك نقطه از سطح دوار همه در يك صفحه اند بنام صفحه مماس ۲) قائم بر هر نقطه از سطح دوار بامحور موازیست یا آنرا قطع میکنند.

۲۷۶ - استوانه

- ۱- دو قاعده استوانه با هم مساویند .
- ۲- صفحه مماس بر استوانه بر یکی از مولدهای آن میگذرد .
- ۳- استوانه حد منشور محیطی یا متحاطی خود میباشد .
- ۴- سطح بدن استوانه قائم مساویست یا حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع .
- ۵- جسم استوانه قائم مساویست یا حاصلضرب قاعده در ارتفاع .
- ۶- سطح بدن (حجم) استوانه مایل مساویست یا حاصلضرب محیط (سطح) مقطع قائم آن در مولد .
- ۷- در استوانه ناقص مستدیر قائم سطح بدن (حجم) مساویست یا حاصلضرب محیط قاعده (سطح قاعده) در محور جسم . [یعنی خطی که از مرکز قاعده موازی مولد رسم شود] .
- ۸- مقطع استوانه مستدیر با هر صفحه که موازی قاعده باشد دایره و با هر صفحه دیگر بیضی است ،

۲۷۷ - مخروط

- ۱- مقطع مخروط مستدیر با هر صفحه که با قاعده موازی باشد دایره ، با هر صفحه که موازی قاعده یا يك مولد نباشد بیضی ، با هر صفحه که موازی يك مولد باشد سهمی و با هر صفحه که مخروط و امتداد آنرا در آن طرف رأس قطع کند هذلولی میباشد (رجوع شود به مخروطات) .
- ۲- صفحه مماس بر مخروط بر يك مولد آن میگذرد .

۳- مخروط حدهرم محیطی و محیطی خود میباشد .

۴- سطح بدن مخروط مساویست به حاصلضرب محیط قاعده در نصف سهم .

۵- حجم مخروط مساویست به حاصلضرب سطح قاعده در ثلث ارتفاع .

۶- مخروط ناقص حد هرم ناقص محیطی و محیطی خود میباشد .

۷- اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص را R و r ، سهم آنرا l و ارتفاعش را h فرض کنیم :

$$\text{حجم} = \pi \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{سطح کل} = \pi [R^2 + l(R + r)] \quad \text{سطح بدن} = \pi l(R + r) \quad \text{۲۷۸- کره}$$

۱- مقطع هر صفحه در کره دایره ایست که مرکزش موقع عمودیت که از مرکز کره بر صفحه قاطع فرود آید . اگر شعاع کره R ، شعاع دایره مقطع r و فاصله این صفحه از مرکز کره d فرض شوند :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

۲- هر خط کره را فقط در دو نقطه قطع میکنند .

۳- قطر عمود بر سطح هر دایره کره ، جسم را در دو نقطه P و P' قطع میکند که دو قطب دایره نام دارند . جمیع نقاط هر دایره از هر يك از دو قطب يك فاصله اند .

۴- در يك کره دایره های متساوی از مرکز يك فاصله اند و به یکس .

- ۵- در يك كره از دایره‌های نامساوی آنكه بزرگتر است
بیشتر كثر نزدیكتر است و بعكس .
- ۶- صفحه مماس بر كره با آن فقط يك نقطه مشترك
دارد و بر شعاع نقطه تماس عمود است .
- ۷- بر يك چهارروى منتظم میتوان يك كره محیط و در
آن يك كره محیط كرد . اگر یال آن را a بنامیم :
- $$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{شعاع كره محیطی} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
- ۸- کوتاه ترین راه بین دو نقطه واقع بر روی كره قوسی
است از دایره بزرگ .
- ۹- برای تعیین شعاع كره باین راه عمل میکنیم :
- دو نقطه M و N از سطح كره را مركز قرار داده با فاصله‌های
قطبی اختیاری قوسهایی (دوبدو یا شعاعهای متساوی) رسم
میککنیم تا از برخورد آنها سه نقطه A و B و C (كه واقعند
بر محیط يك دایره بزرگ) بدست آیند . باینكار گروی طولهای
 AB و AC و BC را بر روی صفحه كاغذ نقل میکنیم و با این
سه طول مثلثی میسازیم . دایره محیطی این مثلث مساوی دایره
بزرگ از كره مخروط و شعاعش مساوی شعاع كره است .
- ۱۰- مساحت سطح حادث از دوران قطعه خط راستی در حول
محوری كه با آن در يك صفحه باشد مساویست ب حاصلضرب
تصویر قطعه خط بر محور در محیط دایره ای كه شعاع آن عمودی
باشد كه بر وسط قطعه خط اخراج و محور محدود گردد .
- ۱۱- حجم حادث از دوران مثلثی حول محوری كه در

صفحه A نیست و بر يك رأس آن میگذرد و ضلع مقابل بآن رأس را قطع نمیکنند مساویست به حاصلضرب سطح حادث از دوران ضلع مقابل در $\frac{1}{2}$ ارتفاع وارد بر این ضلع .

$$4\pi R^2$$

۱۲- سطح کره مساویست به

$$\frac{\pi}{2} d^2 = \frac{4}{3} \pi R^2 \quad \text{« « «}$$

۱۳- حجم « « «
۱۴- اگر دو صفحه موازی بفاصله h کره ای بشعاع R را قطع و در آن دو دایره بشعاعهای r و r' ایجاد کند :

$$2\pi R h = \text{سطح منطقه حادث}$$

$$\text{حجم قطعه کروی حادث} = \frac{\pi}{2} h^3 + \frac{\pi}{2} (r^2 + r'^2) h$$

$$\text{حجم قطاع کروی} = 2\pi R h \times \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 h$$

۱۵- اندازه زاویه قایح قوس مقابل قایح است.

۱۶- اگر قوس قایح را α فرض کنیم در کره ای بشعاع R :

$$\text{سطح قایح} = 4\pi R^2 \frac{\alpha}{360} = \pi R^2 \frac{\alpha}{90}$$

$$\text{حجم اکیل} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\alpha}{360} = \pi R^3 \frac{\alpha}{270}$$

۱۷- حجم حلقه کروی حادث از دوران قطعه دایره ای حول يك قطر دایره مساویست یا نصف حجم مخروطی که شعاع قاعده اش وتر قطعه دایره و ارتفاعش تصویر این وتر بر محور دوران باشد . پس اگر قطعه را AB و طول تصویر

آنرا $A'B'$ فرض کنیم :

$$A'B' \cdot AB^2 = \frac{\pi}{4} = \text{حجم حلقه}$$

XX سه بر کروی

۲۷۹ - تعریف - چند بر کروی قسمتی است از سطح کره محدودیچند قوس ازدوایر بزرگ .



(ش ۱۸) هر يك از قوسهای دایره بزرگ مانند AB را يك پهلوی ، نقطه تلاقی دو پهلوی را يك راس و گوشه بین هر دو پهلوی را يك گوشه چند بر کروی گویند . پس پهلوهایی چند بر

کروی را هم با اتحاد قوس و زاویه اندازه میگیرند .

کنند فظایر يك چند بر کروی آنست که راسش مرکز کره و یالهای آن منتهی بر قوس چند بر باشند .

سه بر کروی ساده ترین چند بر هاست .

سه بر قریب سه بر مفروض آنست که راسش انتهای اقطار میباشد که بر راس سه بر مفروض یگنذرند . سه بر کروی ممکنست سه گوشه راسست یا باز داشته باشد . سه بر قریبی سه بر آنست که هر راس سه بر مفروض قطب يك ضلع آن باشد . درجه کروی سه بری است که دو پهلوی آن 90° و يك پهلوی اش 1° درجه باشد . اگر از مجموع زوایای يك سه بر کروی 2 قائمه کم کنیم تفاضل را فضل کروی آن سه بر گویند .

۲۸۰ - قضیه - پهلوهای چندبرکروی مساوی‌روهای
کنج نظیرش و گوشه‌های آن مساوی فرجه‌های اینست .

۲۸۱ - قضیه - درسه‌برکروی هر پهلو کوچک‌ترست
از مجموع و بزرگ‌ترست از تفاضل دو پهلوئی دیگر .

۲۸۲ - قضیه - مجموع پهلوهای سه‌برکروی کوچک‌ترست
از چهارقاعده

۲۸۳ - قضیه - دوسه‌برکروی قرینه معادلند .

۲۸۴ - قضیه - اگر یک سه‌برکروی قطبی سه‌بردیگر
باشد دومی نیز قطبی اولی است .

۲۸۵ - قضیه - هر گوشه یک سه‌برکروی متهم پهلوئی
مقابل براس نظیرش درسه‌بر قطبی آنست .

۲۸۶ - قضیه - مجموع گوشه‌های سه‌برکروی واقعست
بین ۲ و ۶ قاعده .

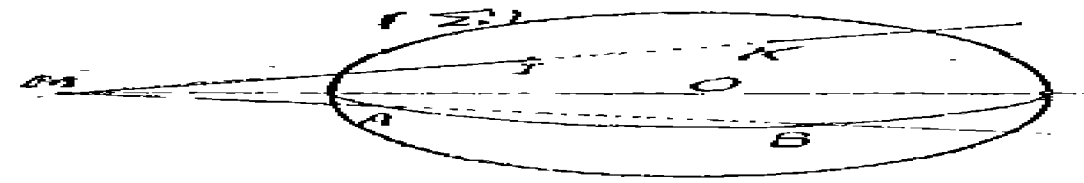
۲۸۷ - قضیه - نسبت مساحت سه‌بر به سطح کره مساوی
نسبت فضل کروی آنست به ۸ قاعده .

نتیجه (۱) مساحت سه‌برکروی نصف حاصلضرب فضل
کروی آنست در مساحت دایره بزرگ :

$$S = \frac{1}{4} \pi R^2 (A + B + C - 180)$$

(۲) اگر سه‌بر سه‌قاعده را که $\frac{1}{8}$ کره است واحد سطح و
زاویه قائمه را واحد زاویه بنامیم سطح سه‌بر مساویست با
فضل کروی آن .

XXIV قوت نقطه نسبت بکره



۲۸۸- هر گاه از نقطه M ، بقاصلة d از مرکز کره Σ (ش ۱۹) ، قاطعه غیر مشخصه‌ی مروردهیم تا کره را در A و K قطع کند $MI = MK$ مقدار یست ثابت و مساوی $d^2 - R^2 = p$.

مقدار p را قوت نقطه M نسبت به کره Σ گویند. برای تکمیل رجوع شود به شماره ۱۱۹

۲۸۹- قضیه — مکان نقاطی که نسبت بدو کره يك قوه داشته باشند صفحه ایست ، بنام صفحه اصلی ، عود بر خط المرکزین که خط المرکزین را در H قطع کند و

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$$

باشد (در دو کره متقاطعه ، مماس یا متحد المرکز صفحه اصلی بترتیب صفحه تقاطع آنها ، صفحه مماس مشترک آنها یا صفحه ای واقع در بی نهایت است) .

تذیقه (۱) سه صفحه اصلی سه کره یکدیگر را بر يك خط ، بنام محور اصلی سه کره ، تلاقی میکنند (۲) شش صفحه اصلی چهار کره که مراکزشان در يك صفحه نباشند بر يك نقطه ، موسوم به هرگز اصلی چهار کره ، میگذرند .

XXV قطب و قطبی

۹- در صفحه (قطب و قطبی نسبت بدایره)

۲۹۰- تعریف- مکان هندسی مزدوجهای توافقی يك نقطه

P را نسبت بدو انتهای قاطع متحرکی که بر l بگذرد و دایره (C) را در M و N قطع کند، قطبی P نسبت به (C) گویند.

۲۹۱- قضیه- قطبی نقطه P نسبت بدایره (C) خطی

است مانند P عمود بر PO که OP را در H تلاقی کند و

$OH = R^2$ باشد.

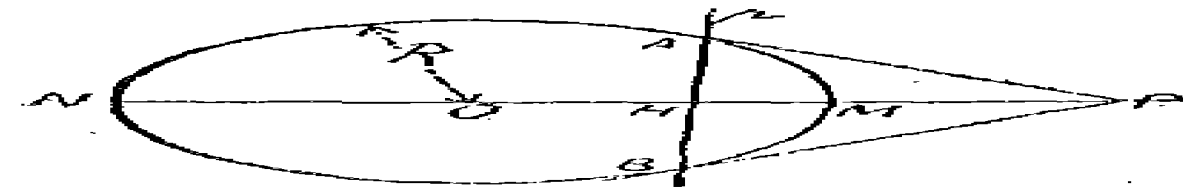
بر حسب آنکه P خارج یا

داخل دایره یا روی دایره باشد

قطبی آن دایره را قطع میکند،

دو خارج آن یا در P مماس بر آن

است. P را قطب خط p گویند.



۲۹۲- قضیه- قطب هر خط که بر نقطه ای بگذرد بر

قطبی این نقطه قرار دارد و بالعکس هر نقطه که بر خطی

واقم باشد بر قطب این خط میگذرد.

۴۹۴- اشکال قطبی معکوس به اگر چند بر $ABCDE$

و دایره (C) در صفحه ای مقروض باشند و چند بر $A'B'C'D'E'$

را بدست آوریم بطوریکه هر ضلع این قطبی يك رأس آن

باشد، هر ضلع آن نیز قطبی يك رأس این خواهد بود. چنین

دو شکل را قطبی معکوس یکدیگر گویند.

اگر در شکلی چند نقطه بر يك خط باشند در قطبی

معکوس آن چند خط بر يك نقطه میگذرند . از این خاصیت برای اثبات قضایای مربوط به خطوط متقارب یا نقاط واقع بر يك خط ممکنست استفاده شود .

۴- در قضیه قطب و قطبی نسبت بکره

۴۹۴- تهریغ = مثل شماره ۲۹۰

۴۹۵- قضیه = قطبی يك نقطه P نسبت بکره صفحه ایست مانند (π) عمود بر خط OP که T را در H قطع کند و $OP \cdot OH = R^2$ باشد .

(بقیه مانند شماره ۲۹۱)

۴۹۶- قضیه = قطب هر صفحه که بر نقطه ای بگذرد بر صفحه قطبی این نقطه واقع است و صفحه قطبی هر نقطه که بر صفحه ای واقع باشد بر قطب این صفحه میگذرد .

نتیجه = قطب های جمیع صفحاتی که بر خط D میگذرند بر يك خط مانند $D^?$ واقعند این خاصیت متقابل است . باینجهت D و $D^?$ را دو خط مزدوج نسبت بکره (S) گویند . هر يك از دو خط مزدوج در صفحه ایست که از مرکز کره بردیگری عمود شود . عمود مشترك آنها بر مرکز کره میگذرد و آنها را در k و $k^?$ قطع میکند و $Ok \cdot Ok^? = R^2$ است .

XXVI انعکاس

۵- در صفحه

۴۹۷- تهریغ = اگر نقطه O و شکل F مقروض باشند و از O به A و B و C . . . نقاط مختلف F وصل کرده در

روی خطوط واصل نقاط A' و B' و C' و O را بدست آوریم
یقه می که :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots = p$$

باشد از مجموع نقاط A' و B' و \dots شکل I'' منتهی
شکل I'' نسبت به مرکز آن O با قوت انعکاس p بدست
می آید . اگر هر دو نقطه متناظر در یک طرف O باشند p مثبت
و اگر نه منفی است . هر دو نقطه متناظر را منتهی یکدیگر
میگویند .

هرگاه $p > 0$ باشد و مرکز O و شعاع \sqrt{p} دایره ای رسم
کنیم ، این دایره را ، که مکان نقاطیست که بر منتهی خود
منطبقند ، دایره انعکاسی مینامید .

۴۹۸ - نتیجه (۱) دو نقطه منتهی نسبت به دایره
انعکاس مزدوج یکدیگرند (۲) بین AB و $A'B'$ خطوط
واصل بین دو نقطه A و B و دو منتهی آنها این رابطه
برقرار است :

$$A'B' = AB \times \frac{p}{OA \cdot OB}$$

(۳) دو نقطه A و B با منتهیهایشان A' و B' بر روی
یک دایره قرار دارند .

۴۹۹ - قضیه - مماسهای بر دو منتهی منتهی در دو
نقطه منتهی A و A' با خط AA' زوایای مساوی میسازند
نتیجه - منتهی هر زاویه با آن مساویست .

۴۴۰ - قضیه - اگر I'' و I''' منتهیهای I'' با قوتهای

P' و P'' نسبت به نقطه O باشند I° و I'' نسبت به مرکز O با نسبت $\frac{P'}{P}$ معجاناتس یکدیگر نهند و بر حسب T نکه P' و P'' متحد علامه یا مختلف علامه باشند معجاناتس T آنها مستقیم یا معکوس میباشد .

۳۰۹ - قضیه - ۱) منعکس دایره ای که بر مرکز انعکاس میگذرد خطیست عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس میگذرد . ۲) منعکس هر خط دایره ایست که بر مرکز انعکاس مرور کند . (اگر خط بر مرکز انعکاس بگذرد منعکس آن بر خودش منطبق است)

۳۰۲ - - - قضیه - منعکس هر دایره (که بر O نگذرد)

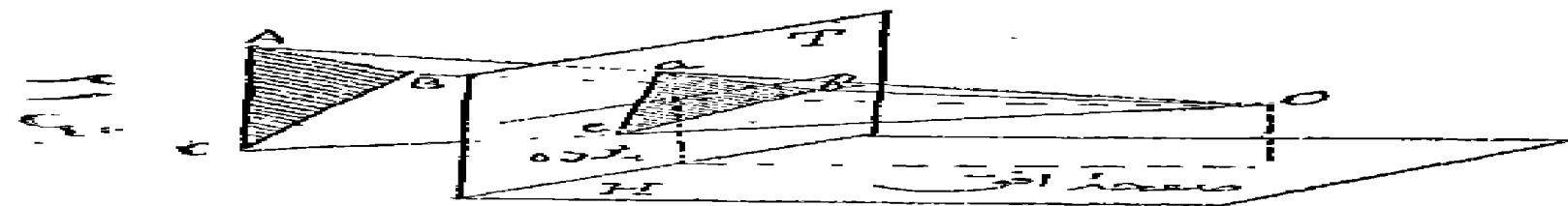
دایره است .
 نتیجه - ۱) هر دو دایره منعکس و معجاناتس یکدیگر نهند نسبت به نقاط تلاقی مماسهای مشترک خود .
 ۲) مماسهای بر دو نقطه منعکس از دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی قطع میکنند
 ۳ - در قضیه

۳۰۳ - هر دایره مانند شماره ۲۹۷ خواص شماره ۲۹۸ در فضا نیز صحیح است .
 ۳۰۴ - - - قضیه - ۱) منعکس هر کره که بر مرکز انعکاس بگذرد صفحه است عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس مرور نماید . ۲) منعکس هر کره که بر مرکز انعکاس میگذرد صفحه کره ایست که بر مرکز انعکاس میگذرد .
 ۳۰۵ - - - قضیه - منعکس هر دایره نسبت به یک نقطه که

در صفحه دایره نباشد دایره است .
 دایره اخیر را تصویر در هر گزی *proj. stéréographique*
 دایره اولی نسبت به مرکز تصویر O میگویند
 (نهیجه - ۱) اگر قاعده مخروط مستدیری بر روی کره ای
 باشد این کره مخروط را در دایره دیگری هم قطع می‌کند (۲)
 بر هر دو دایره واقع بر یک دایره عموماً میتوان دو مخروط
 گذارند .

xxvii - مناظر و مرایا (پرسپکتیو)

۳۰۶ - تصویر صفحه - در شکل I و F' را گویند نسبت به یکدیگر
 در وضع منظری هستند ، یا یکی تصویر در هر گزی یا تصویر در
 مخروطی یا پرسپکتیو دیگریست هر گاه هر نقطه و نقطه
 متناظر آن یا نقطه ثابتی مانند O بر یک امتداد باشند نقطه
 O را مرکز تصویر یا نقطه دید میگویند . هر ده صفحه ایست



که بخواهیم پرسپکتیو
 جسمی را بر روی آن
 رسم کنیم (ش ۲۱) -
 P موقع عمودی را
 که از نقطه دید بر رده

فروداید نقطه اصلی و فاصله P را فاصله اصلی و خط HI HI'
 که از نقطه اصلی موازی سطح افق رسم شود خط افق و
 دو نقطه I و I' را که بر روی $II-I'$ بفاصله ای مساوی فاصله
 اصلی از P اختیار شوند نقاط مسافت میگویند .

پرسپکتیو هر نقطه مانند A نقطه A' محل تلاقی شعاع دید OA — با پرده.

پرسپکتیو هر خط مانند AB خط $A'B'$ فصل مشترك صفحه OAB است با پرده.

نقطه گریز — هر گاه از O خطی موازی AB رسم کنیم تا پرده را در f قطع کند f ، که پرسپکتیو نقطه بی نهایت دور خط AB است، نقطه گریز AB نامیده میشود،

خط گریز — هر گاه از O صفحه ای موازی صفحه ABC رسم کنیم تا پرده را بر خط F قطع کند F ، که پرسپکتیو خط بی نهایت دور صفحه ABC است، خط گریز آن صفحه نامیده میشود. صفحه ای را که موازی پرده رسم شود جبهه می نامند.

۳۰۷- قضیه — پرسپکتیوهای خطوط موازی بر يك نقطه میگذرند (نقطه گریز مشترك آنها) .
 نتیجه — اگر خطوط موازی با پرده هم موازی باشند پرسپکتیوهای آنها متوازییند.

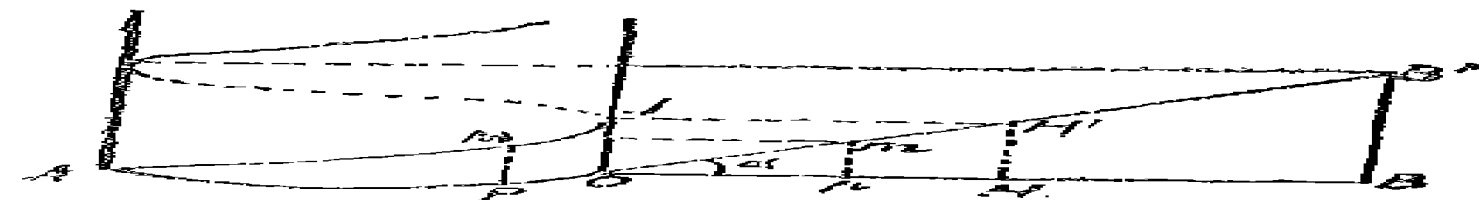
۳۰۸- قضیه — خطوطی که یکدیگر را در روی صفحه جبهه مار بر نقطه دید تلاقی کنند پرسپکتیوهایشان متوازییند.
 ۳۰۹- قضیه — نقاط گریز خطوط افقی در روی خط افقی FIF' قرار دارند.

حالات خاص — نقاط گریز خطوط افقی که با پرده زاویه 90° تشکیل میدهند نقاط مسافت D و D' هستند.

۳۱۰ قضیه - ۱) پرسپکتیو دایره يك قطع مخروطی
(بیضی ، هذلولی یا شلجمی) است ۲۰) پرسپکتیو يك قطع
مخروطی ممکنست دایره باشد.

XXVIII مارپیچ Helice

۳۱۱ — تعریف اگر زاویه ای مانند α حول استوانه
مستدیر قائمی چنان پیچید که يك ضلع آن بر قاعده منطبق
شود ضلع دیگر بر تنه استوانه خمی ترسیم میکند که مارپیچ
یا حلزونی نام دارد . (ش ۲۲)



ش ۲۲

چون استوانه و اضلاع
زاویه نامحدودند مارپیچ
هم بی پایان میباشد. محور
و شعاع استوانه را جان
ame و شعاع مارپیچ و
خلل زاویه α را شیب آن

گویند . نقطه A مبدأ مارپیچ است فاصله دو نقطه مارپیچ
واقع بر يك مولد مانند A و D را گام مارپیچ مینامند قسمت
MP از مولد محدود بین يك نقطه M از مارپیچ و قاعده
استوانه را عرض نقطه M و قوس AP واقع بین مبدأ و نقطه
P ، تصویر M ، را طول منحنی نقطه M میگویند . قسمتی
از مارپیچ که فاصله دوسر آن يك گام باشد یعنی از يك دور
کامل تشکیل شده باشد يك پیچ نام دارد .

پیچ ممکنست بر است dextrorsum (ش ۲۳) یا
 پیچ sinistrorsum (ش ۲۴) باشد یعنی در قسمت مرئی استوانه
 بطرف راست یا بطرف چپ بالا برود .



(ش ۲۳) (ش ۲۴)

۳۱۲ — قضیه — عرض هر نقطه مارپیچ متناسب است
 با طول منحنی آن نقطه . این نسبت مساوی شیب مارپیچ است
 تهریف — از قضیه فوق این تهریف برای مارپیچ نتیجه
 میشود : مارپیچ منحنی ایست که بر استوانه قائم مستدیری پیچیده
 شده باشد و عرض هر نقطه آن متناسب با طول منحنی آن
 نقطه باشد .

۳۱۳ — مارپیچهای واقم بر يك استوانه یا استوانه‌های
 مساوی را که در يك جهت بوده و شیبشان با هم برابر باشد
 مساوی گویند .

۳۱۴ — مماسی بر مارپیچ — قضیه — بر هر نقطه از
 مارپیچ مماسی میتوان رسم کرد . تصویر آن بر صفحه قاعده
 استوانه مساوی طول منحنی نقطه تماس است .

۳۱۵ — نتیجه — میل مماسهای بر مارپیچ با صفحه
 قاعده مقدار یست ثابت .

۳۱۶ — معادله مارپیچ

$$y = kx = \frac{l_1}{2\pi r} x \quad (l_1 = \text{گام})$$

۳۱۷ — قضیه — کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از سطح

استوانه (مستدیر قائم) قوسی از مارپیچ است .

مخروطات

۱ - بیضی

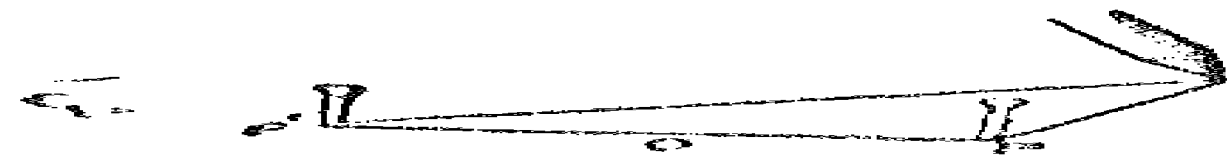
۱ — تعریف بیضی مکان نقاطیست که مجموع فواصلشان

از دو نقطه ثابت F و F' مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد - F و F' را دو کانون، $FF' = 2c$ را فاصله کانونی، O وسط FF' را مرکز، خط AA' را که بر F و F' میگذرد و دوانتهای آن A و A' از O بفاصله a هستند محور ا طول، خط BB' را که از O بر AA' عمود شود و دو انتهای آن B و B' از نقطه O بفاصله $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ باشند محور ا قصر، A و A' و B و B' را چهار رأس، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروجاز مرکز، دایره‌ای را که بر مرکز O و شعاع $OA = a$ رسم شوددایره اصلی، دو دایره را که بر مراکز I' و I'' و شعاع a رسم

شوند دایره‌های و هر خطی را که از یک کانون

بیش نقطه AI از بیضی وصل شود شعاع حامل می‌نامند .

۴- رسم بیضی - ۱) با حرکت متصل - دو مستیاق در دو کانون کوبیده دوانتهای نخی بهاول $۲a$ - $۲c$ را کمره میزنیم نخ را از پشت سنجاقها رد میکنیم و نوک مدادی را در داخل آن چنان حرکت میدهیم که نخ همیشه کشیده شده باشد نوک



مداد بیضی رسم میکند (ش ۱) - ۲) با نقاط یا بی ۱۰ را مرکز قرار داده با شمع $۲a$ - $۲c$ قوسی رسم می-کنیم بعد بر ۱۰ و شمع ۱ - $۲a$ -

قوسی میزنیم تا قوس اول را در M و M' قطع کند. این نقاط متعلق به بیضی هستند. ۳) رسم بیضی بکمات حاشیه کاغذ اگر OA و OB نیمی از محورهای بیضی باشند (ش ۲) بر روی لبه کاغذی مانند P, P', M, M' خطوطی



PM و $P'M$ را بترتیب مساوی a و b جدا میکنیم و بعد کاغذ را بر صفحه چنان میگذاریم که P و P' و P' بترتیب بر OA و OB (پایه‌ها) آنها باشند. M در دو وقت پیوسته در یک مکان میدهد (رجوع بشود به شماره ۱ و ۲).

توضیح - بکمات حاشیه کاغذ و دو خط مستقیم موازی با هم را با هم میزنیم که یک نقطه از بیضی معلوم می‌گردد و این نقطه را با یک خط مستقیم از OA و OB نصف محورهای M و M' میزنیم و با شمع ۱ - $۲a$ - $۲c$ قوسی میزنیم تا قوس اول را در M و M' قطع کند. این نقاط متعلق به بیضی هستند. ۳) رسم بیضی بکمات حاشیه کاغذ اگر OA و OB نیمی از محورهای بیضی باشند (ش ۲) بر روی لبه کاغذی مانند P, P', M, M' خطوطی

M و MF' قطع میکنند . M و M' جوابهای مسئله‌اند (اگر I روی دایره هادی I' واقع شود خط با بیضی مماس است و اگر I در درون دایره هادی افتد خط بیضی را قطع نمیکند) .

مماس بر بیضی

۷- قضیه - مماس بر هر نقطه از بیضی گوشه بین يك شعاع حاصل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند .

نتیجه — (۱) قرینه هر کانون نسبت به مماس بر روی دایره هادی کانون دیگر است (۲) مماس بر هر رأس عمودست بر محور .

۸- قضیه — قائم بر هر نقطه از بیضی گوشه بین دو شعاع حاصل را نصف میکند .

نتیجه — مماس و قائم بر هر نقطه از بیضی FF' را به نسبت توافقی تقسیم میکنند .

۹ — قضیه — La Hire — تصویری هر کانون بر روی مماس واقعست بر روی دایره اصلی .

۱۰ — رسم مماس بر بیضی — (۱) از نقطه واقع بر بیضی : دو شعاع حاصل را میکشیم ، منصف گوشه خارجی آنها مماس مطلوبست .

(۲) از نقطه P خارج بیضی : بر کز P و شعاع PF دایره‌ای میزنیم تا دایره هادی F' را در φ و φ' قطع کند ، عمودهایی که از P بر $F\varphi$ و $F'\varphi'$ فرود آیند ، دو مماس مطلوبند (شرط

۱) امکان متقاطعی بودن دایره مرسوم با دایره هادی I^2 است، یعنی باید IP بیرون بیضی باشد.

۲) مماس موازی امتداد \triangle : از I^2 عمودی و \triangle فرود می آوریم تا دایره هادی I^2 را در φ و φ' قطع کند، عمود منصف های $I\varphi$ و $I\varphi'$ را رسم می نماییم. مسئله همیشه دو جواب دارد.

۱۱ — نتیجه — وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس موازی بر مرکز بیضی میگذرد.

۱۲ — قضیه Poncelet (۱) اگر از P دو مماس بر بیضی رسم شود این دو مماس با PF و PF' گوشه های مساوی میسازند. ۲) خطی که از P یکی از دو کانون وصل شود منصف گوشه اشعه حاملی است که از این کانون بدو نقطه تماس منتهی گردند.

۱۳ — قضیه — مماس متحرکی که بین دو مماس ثابت بر بیضی محدود باشد از هر کانون بزائویه ثابتی دیده میشود.

۱۴ — قضیه — مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر

بیضی دایره ایست بر مرکز O و شعاع $\sqrt{a^2 - b^2}$

۱۵ — قضیه — ۱) حاصلضرب فواصل دو کانون از هر مماس مساویست با b^2 ۲) اگر از یک کانون خطی موازی مماس رسم کنیم تقاضل مربعات فواصل مرکز از مماس و از خط مرسوم مساویست با b^2

۱۶ - قضیه Chasles - مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر دو بیضی متحدالکانونین به محورهاى a و b و a' و b' دایره ایست به مرکز O و شعاع :

$$\sqrt{a'^2 + b^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{a^2 + b'^2}$$

شعاعهای حامل - معادله بیضی

۱۷ - قضیه - شعاعهای حامل هر نقطه M از بیضی که فاصله تصویر آن بر محور اطول از مرکز بیضی x فرض شود به ترتیب عبارتند از

$$a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a + \frac{cx}{a}$$

۱۸ - قضیه - اگر محاورهای بیضی محورهای مختصات فرض شوند (محور را طول محور طولها) معادله بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عبارتست از

بیضی تصویر دایره است

۱۹ - قضیه - تصویر قائم دایره بر صفحه بیضی ایست که طول محور اطول آن a و طول محور اقصی $a \cos \alpha$ (زاویه بین صفحه دایره و صفحه تصویر) میباشد.

۲۰ - قضیه - مساحت بیضی مساویست با πab

نتیجه - برای بدست آوردن مساحت هر جزء از بیضی باید مساحت جزء نظیر آن را در دایره اصلی بدست آورد و در $\frac{b}{a}$ ضرب کرد .

۲۱ — قضیه — نسبت عرض نقاط مختلف بیضی به عرض

نقاط نظایر آنها از دایره اصلی مساوی مقدار ثابت $\frac{b}{a}$ است. (نقطه نظایر T نسبت که با نقطه مفروض در روی عمودی بر $A'A'$ واقع باشند)

۴۴ — رسم مماس به ۱) از يك نقطه M واقع بر بیضی - نظایر نقطه مفروض را بر روی دایره اصلی بسازیم از آن مماسی بردایره اصلی رسم میکنیم و از محل تقاطع این مماس با محور اطول بیضی به M وصل میکنیم. ۲) از نقطه M خارج بیضی - نقطه M' را که عرض آن $\frac{b}{a}$ عرض M باشد یافته

از آن مماس $M'I'$ را بردایره اصلی رسم میکنیم تا محور اطول را در I قطع کند $M'I$ مماس بر بیضی است و نقطه تماس واقع است در روی عمودی که از T' بر محور اطول فرود آید. ۳) مماس موازی امتداد $\triangle I$ - فصل مشترك \triangle را با محور اطول بدست آورده نقطه M'

را هم که عرض آن $\frac{b}{a}$ يك نقطه M از \triangle باشد تعیین میکنیم بردایره اصلی مماسهایی موازی $M'I'$ میکشیم و در روی عمود هائی که از نقاط تماس بر محور اطول فرود آیند نقاطی که عرضشان به عرض نقاط مماس بر نسبت $\frac{b}{a}$ باشد تعیین نموده از این نقاط خطوطی متوازی \triangle رسم میکنیم.

II هندلوی

۴۴ — تعریف — هندلوی متکان نقاطیست که تفاضل

فواصلشان از دو نقطه ثابت F و F' مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد .
 سایر تعاریف مانند شماره ۱ (فقط) باید توجه کرد که
 محور اقصی هندلولی در حقیقت وجود ندارد و برای شباهتی که
 بین خواص بیضی و هندلولی هست خطی را که از وسط دو
 کانون بطول a — $\sqrt{c^2}$ برابر محور شکل عمود شود محور اقصی
 می نامند) در هندلولی بجای محور طول اغلب گفته میشود محور قاطع .
 اگر $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد هندلولی را متساوی الاضلاع میگویند .

۴۴ رسم هندلوی = ۱) با حرکت متصل : خط کشی
 بطول ۱ را حول سنجاقی که در يك کانون فرورفته باشد دوران
 میدهم ، نخى بطول $2a$ — اختیار میکنیم ، يك سر آن را
 بانتهای خط کش کوپیده سر دیگرش را در کانون دیگر ثابت
 نگاه میداریم . نوک مدادی که همواره نخ را بر خط کش
 متکی نگاهدارد قسمتی از هندلوی رسم میکند . ۲) با نقاط
 یابی : مانند بیضی با رسم قوسهایی بشعاعهایی ۱ و a — .

۴۵ قضیه = تفاضل فواصل هر نقطه درون هندلوی از
 دو کانون بزرگتر و از آن نقاط بیرون هندلوی کوچکتر است
 از $2a$. و بعکس .

۴۶ قضیه = هندلوی مکان هندسی نقاطیست که از يك
 کانون و دایرة هادی کانون دیگر فاصله باشند (مکان

مراکز دوا بر یست که بر یک کانون بگذرند و بر دایره کانون هادی دیگر مماس باشند).

۴۷- فصل مشترک خط و هذلولی مانند فصل مشترک

خط و بیضی

مماس بر هذلولی

۴۸- قضیه - مماس بر هذلولی زاویه بین دو شعاع حامل

را نصف میکند.

نتیجه ۱- رجوع شود بشماره ۷ (نتیجه ۱ و ۲)

نتیجه ۲- قائم بر هر نقطه از هذلولی زاویه بین یک شعاع

حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند

نتیجه ۳- رجوع شود به شماره ۸ (نتیجه)

۴۹- قضیه - تصویری کانون بر روی مماس واقعست

بر دایره اصلی.

۵۰- رسم مماس - مانند شماره ۱۰. فقط باید توجه

کرد که رسم مماس موازی امتداد معین فقط وقتی جواب

دارد که عمودیکه از یک کانون بر آن امتداد فرود میآید دایره

هادی کانون دیگر را قطع کند (یعنی عمود بر امتداد مقروش

در داخل زاویه بین دو مماس باشد که از یک کانون بر دایره هادی

کانون دیگر رسم میشوند).

۵۱- قضیه - دو ضلع - مانند بیضی (شماره ۱۲)

۵۲- قضیه - عین خواص مندرج در شماره ۱۵

مجا نیه‌ای هندلوی

۳۳ - زهر یف - (رجوع شود بشماره ۱۸۸ قسمت جبر) — و نیز میتوان گفت مجانب هندلوی مماسی است که نقطه تماس آن بینهایت دور باشد .

۳۴ - قضیه - هندلوی دو مجانب دارد که بر مرکز آن میگذرند .

نتیجه ۱ - مجانبها نسبت بدو محور قرینه یکدیگرند
نتیجه ۲ - دو مجانب هندلوی عمودهایی هستند که از O بر مماسهایی که از F و F' بر دایره اصلی رسم میشوند فرود آیند .

۳۵ - قضیه - ممابها دو قطر مستطیلی هستند که مرکز O و اضلاعش با دو محور موازی و پرتیب مساوی $2a$ و $2b$ باشند .

نتیجه ۱ - دو مجانب هندلوی متساوی المحورین بر هم عمودند .

نتیجه ۲ - فاصله هر کانون از هر مجانب مساوی b است .

شعاعهای حامل - معادله هندلوی

۳۶ - قضیه - شعاعهای حامل هر نقطه هندلوی مساوی هستند با :

$$a + \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a - \frac{cx}{a}$$

» x فاصله O از عمودیست که از نقطه مفروض بر محور قاطع فرود آید (

۳۷ — قضیه — اگر نقطه (د) مرکز و محورهای هندلوی
محورهای مختصات باشند معادله هندلوی :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{میباشد}$$

نتیجه — معادله هندلوی متساوی‌المحورین :

$$a^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \quad \text{است}$$

نتیجه ۲ — اگر مختصات هندلوی متساوی‌المحورین
محورهای مختصات فرض شوند معادله آن :

$$\frac{a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{a^2}{2} = \frac{y^2}{2} \quad \text{میباشد.}$$

III سهمی (شالجمی)

۳۸ — تعریف — سهمی مکان هندسی نقاطیست که از
يك نقطه، بنام کانون، و يك خط، بنام هادی، بیک فاصله باشند.
خطی که از کانون بگذرد و بر هادی عمود باشد محور، فاصله
کانون از هادی پارامتر و خطوطی که یکی يك نقطه M را
بکانون I وصل کند و دیگری از N بر هادی عمود باشد
شعاعهای حامل نام دارند. محل تلاقی محور با سهمی، رأس
آنست. تصویر قسمتی از مماس واقم بین نقطه تماس و امتداد
محور بر محور را تحت ظل و تصویر قسمت مشابه از قائم را
تحت قائم گویند.

۳۹ — در سهمی (۱) با مرکز دایره خط کشی در
مقابل هادی میگذاریم. يك سرنتی بطول يك ضلع گونیایر

یگانون و سر دیگر آنرا بنقطه تلاقی آن ضلع با وتر گونیا تا بت نموده ضلع دیگر گونیا را متکی بخط کش میفرانیم، نوک مدادی که نخ را همیشه بضلع گونیا متکی نگاهدارد قسمتی از سهمی را رسم میکند. ۲) ترسیم با نقطه یابی - از گانون بنقطه غیر مشخص N از هادی وصل میکنیم، عمود منصف IN عمودیرا که از N بر هادی اخراج شود در NT قطع میکند، NI واقعت بر روی سهمی. راه دیگر: I' گانون و I محل تلاقی محور و هادی فرض میشوند، خط Δ را موازی هادی رسم میکنیم تا محور را در $I'D$ تلاقی کند. بر مرکز I' و شعاعی مساوی $I'D$ قوسی میزنیم تا Δ را در M و NT قطع کند، این دو نقطه بر روی سهمی هستند.

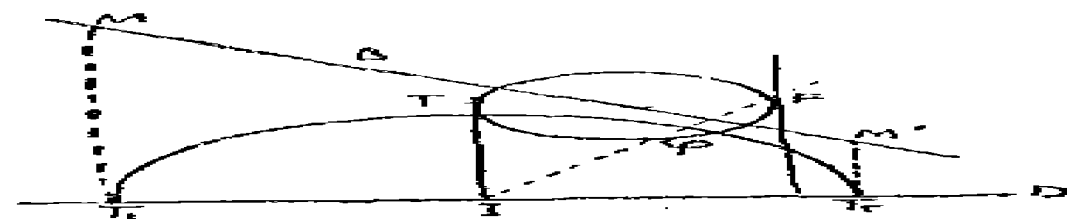
۴۰ - قضیه - هر نقطه درون سهمی یگانون نزدیکتر است تا بهادی و هر نقطه بیرون آن بهادی نزدیکتر است تا یگانون. و بعکس.

۴۱ - قضیه - خطی که از I' بر هادی عمود شود محور تقارن سهمی است (بهین جهت محور نامیده میشود).

۴۲ - قضیه - سهمی حد يك بیضی است که يك رأس و يك گانون آن ثابت بمانند ولی گانون دیگر در روی محور طول بی نهایت دور شود.

توضیح - از قضیه فوق میتوان استفاده کرد و بسیاری از خواص سهمی را با استفاده از خواص مشابه در بیضی ثابت نمود.

۴۳ — فصل مشترك خط و سهمی — برای بدست آوردن فصل مشترك خط \triangle با يك سهمی Δ^k کانون و هادی آن F و (D) هستند (ش ۵) ϕ قرینه T را نسبت به \triangle



(ش ۵)

یافته دایره‌ای رسم میکنیم که بر T و ϕ بگذرد و بر (D) مماس شود و مرکز این دایره فصل مشترك سهمی با \triangle است. بر حسب آنکه ϕ و F يك طرف (D) واقع شوند یا ϕ بر (D) قرار گیرد خط سهمی را دو جا قطع میکند یا بر آن مماس است. اگر ϕ آن طرف (D) واقع شود خط منحنی را قطع نمی نماید.

مماس بر سهمی

۴۴ — قضیه — مماس بر سهمی منصف زاویه بین دو شعاع حامل است.
 نتیجه ۱ — قرینه کانون نسبت به مماس بر خط هادی واقع است.

نتیجه ۲ — اگر از T خطی بر شعاع حامل نقطه تماس عمود کنیم، این خط بر مماس تلاقی مماس با هادی میگذرد.
 نتیجه ۳ — قائم بر سهمی منصف زاویه بین يك شعاع حامل و امتداد دیگر است.

۴۵ — قضیه — مماس بر راس مکان انصاف کانون بر مماسهای بر سهمی است.

بر کانون می‌گذرد (۲) قطعه‌ای از یک مماس متحرک محصور بین نقطه تماس و خط هادی از کانون برآوریه قائمه دیده می‌شود.

۴۹- قضیه- خطی که از محل تقاطع دو مماس موازی محصور رسم شود بر وسط خط واصل بین تقاطع مماس می‌گذرد.

۵۰- قضیه- (پو قسمله ۱) مماس‌هایی که از یک نقطه M بر سهمی رسم شوند با خطی که این نقطه را بکانون ربط می‌دهد و با عمودیکه از M بر هادی فرود می‌آید گوشه‌های مساوی میسازند (۲) FM منصف گوشه بین شعاع‌های حامل دو نقطه تماس است.

۵۱- قضیه- قسمتی از مماس متحرک که بین دو مماس ثابت محصور باشد از کانون بگوشه ثابتی دیده می‌شود.

نتیجه- اگر سه مماس بر سهمی یکدیگر را در M و N و P قطع کنند دایره MNP بر کانون سهمی می‌گذرد.

شعاع حامل، معادله، مساحت سهمی.

۵۲- قضیه- هر گاه راس سهمی را مرکز مختصات، محور X را محور طولها و مماس بر راس را محور عرض‌ها فرض کنیم:

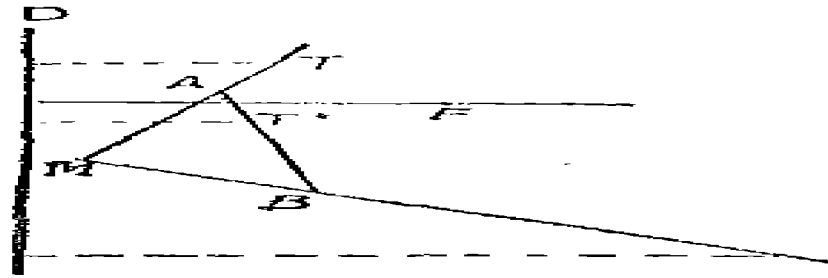
(۱) شعاع حامل هر نقطه x بطول x مساویست با $\frac{p}{2} + x$
 (۲) معادله سهمی عبارتست از $y^2 = 2px$

۵۳- قضیه- سطح قسمتی از سهمی محصور بین منحنی و عمودی که بر محور رسم شود $\frac{1}{2}$ سطح مستطیلی است که

يك ضلع آن قسمتی از عمود مرسوم بین دو شاخه منحنی و ضلع دیگرش فاصله این عمود از رأس سهمی باشد .

۵۴ - قضیه آریو لوی فیورسی - مماس

متحرك محدود بین دو مماس ثابت
مماسهای ثابت را به نسبت عكس
يكديگر تقسیم میکنند . یعنی
(ش ۷)



$$\frac{AM}{AT} = \frac{BT}{BM}$$

عكس قضیه هم صحیح است .

(ش ۷)

IV - خواص مشتق بیهی ، هندلوی و سهمی

۱ - کانون و هادی

۵۵ - تعریف - مکان هندسی نقاطی از صفحه را که نسبت فواصلشان از يك خط ثابت ، بنام هادی ، و يك نقطه ثابت ، بنام کانون ، مساوی مقدار ثابتی ، بنام خروج از مرکز باشد يك منحنی دارای هادی Courbe à directrice میگویند .

۵۶ - قضیه - ۱) بیهی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a فواصلشان از کانون و هادی ثابتی ، ثابت و کوچکتر از ۱ میباشد .

۲) هندلوی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a ،

فواصلشان از کانون و هادی ثابتی، ثابت و بزرگتر از ۱ میباشد.

(۳) سهمی مکان هندسی نقاطیست که نسبت C و a ، فواصلشان از کانون و هادی ثابتی مساوی ۱ میباشد.

(۴) خروج از مرکز منحنی است. در بیضی و هذلولی بازاء هر کانون يك هادی وجود دارد که وابسته بآن کانون است. پس بیضی و هذلولی و سهمی مکان هندسی نقاطی هستند که نسبت فواصلشان از نقطه ثابتی و خط ثابتی مقداری است ثابت.

۵۷ — قضیه — منصف یکی از زاویه های حادث بین دو خط که کانون F را بدو نقطه M و M' از يك بیضی، هذلولی یا سهمی وصل میکنند بر محل تلاقی M' M یا هادی \triangle میگذرد.

نتیجه ۱ — قطعه ای از مماس بر بیضی، هذلولی یا سهمی محصور بین هادی و نقطه تماس از کانون زاویه قائمه دیده میشود.

نتیجه ۲ — اگر از يك نقطه P واقع بر هادی دو مماس PT و PT' بر بیضی، هذلولی یا سهمی رسم کنیم وتر TT' بر کانون میگذرد و PF عمود است بر TT' .

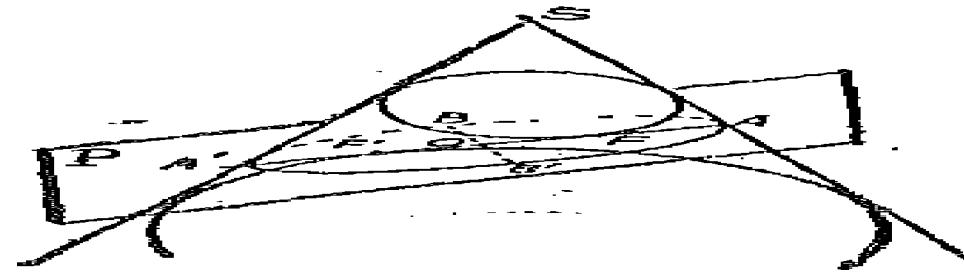
۵۸ — رسم مماسی — برای اینکه از نقطه T واقع بر یکی از منحنیهای سه گانه مماسی بر آن رسم کنیم کافیست از T به F وصل نماییم و عمودی بر FT بکشیم تا هادی را در P

قطع کند. PT مماس معادل و بست.

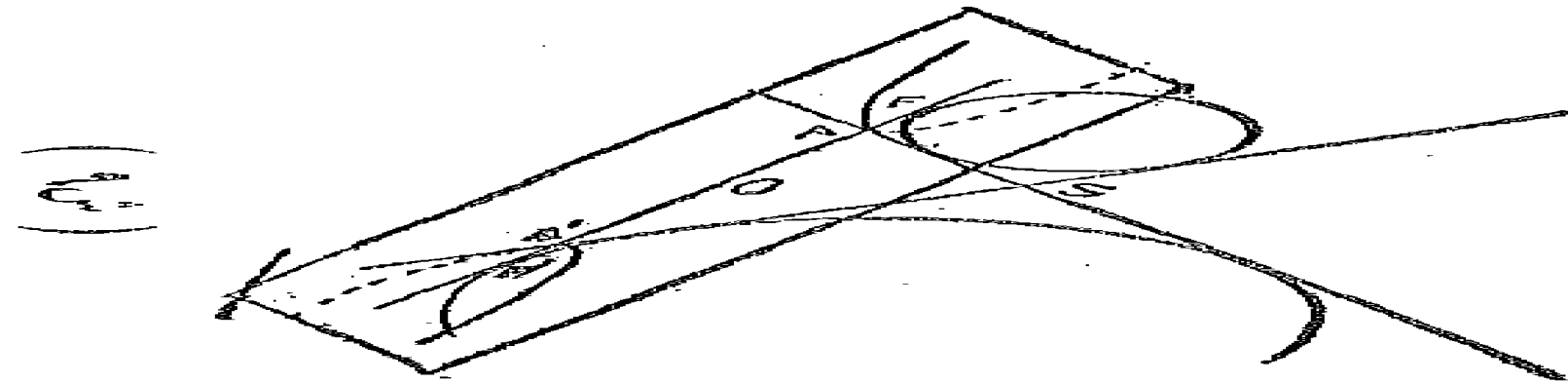
۲- مقاطع مخروطی

۵۹- قضیه داندلن- هر گاه صفحه‌ای مخروط مستدیری

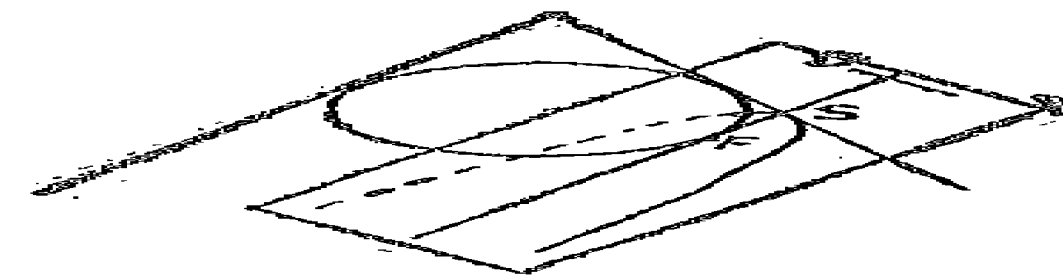
را قطع کند: ۱) اگر همه مولدهای آنرا در يك طرف رأس تلاقی کند مقطع يك بیضی است (ش ۸) ۲) اگر امتداد بعضی از مولدها را قطع نماید (دو دامنه مخروط را قطع کند) مقطع هندلوی است (ش ۹) ۳) اگر صفحه موازی يك مولد باشد مقطع سهمی است (ش ۱۰)



(ش ۸)



(ش ۹)



«ش ۱۰»

۶۰- قیصر ۱۵- اگر صفحه قاطع عمود بر محور مخروط

مستدیر باشد مقطع دایره است.

۶۱- قیصر ۵۲- بمشاسبت اینکه بیضی و هندلوی و سهمی

مقاطع صفحه در مخروط هستند آنها را مقاطع یا قطعات مخروطی یا بطور خلاصه مخروطات گویند. بیضی را **قطع ناقص** ، هندلوی را **قطع زائد** و سهمی را **قطع ممکافی** نیز مینامند.

۶۲ — **فیکوره** — اگر رأس مخروط بی نهایت دور شود جسم تبدیل باستوانه مستدیر میگردد. پس مقطع صفحه مستوی در استوانه مستدیر نیز بیضی است، مگر وقتی که صفحه با مولد موازی باشد که در این صورت مقطع دو خط مستقیم است (یعنی یک سهمی که پارامترش صفر و کانونش بی نهایت دور است).

هندسه رقومی و هندسه ترسیمی

۱ — **موضوع** — موضوع هندسه های رقومی و ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویر قائم آنها.

M' تصویر نقطه M بر صفحه تصویر (P) موقع عمود است که از M بر (P) فرود آید. همیشه میتوان از M به M' پی برد اما M' یتنهایی برای مشخص کردن M کافی نیست زیرا M' تصویر جمیع نقاطیست که بر روی عمودی که M' موقع آنست واقع باشند.

پس برای مشخص ساختن M باید علاوه بر M' عامل دیگری در دست باشد.

این عامل ممکنست رقوم M یعنی فاصله M از صفحه مقایسه باشد (موضوع هندسه رقومی) یا تصویر دیگری از

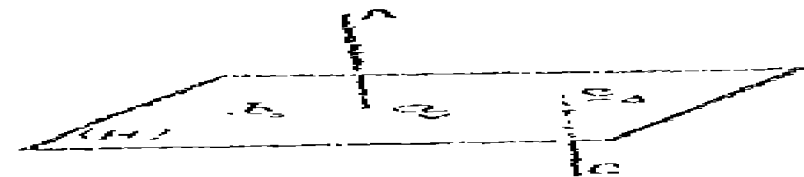
IV. بر صفحه دیگر (موضوع هندسه ترسیمی)

پنا بر این موضوع هندسه رقومی نمایش اجسام است
 بوسیله تصاویرشان بر یک صفحه و فاصله نقاط مختلفشان از
 این صفحه . موضوع هندسه ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله
 تصاویرشان بر دو صفحه مشخص .

۱- اصول نقطه رقومی

۱- نقطه

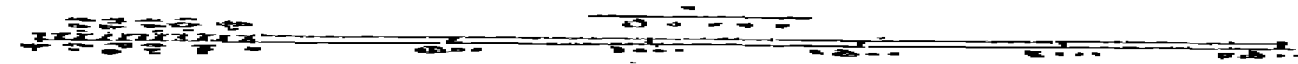
۲- نقطه بوسیله تصویر و فاصله اش از صفحه افق (صفحه
 مقایسه) مشخص میشود . تصویر نقطه را با حرف لاتینی
 کوچک و رقوم آن را بشکل اندیس زیر آن نمایش میدهند مانند
 نقطه a_v (ش ۱) رقومها در صفحه مقایسه صفر ، زیر آن منفی و
 بالای آن مثبت میباشند .



(ش ۱)

تصویر نقطه و رقوم آن را
 ملغصه نقطه میگویند . ملغصه هر
 شکل شکلی است که از ملغصه های
 نقاط مختلف آن پدید آمده باشد .
 ۳- مقیاسی — چون اجسام را
 با یار حقیقی نمیتوان نمایش داد ناچار
 ابعاد آنها را ده ، صد ، هزار ، ...
 مرتبه کوچک میکنند . مقیاس نسبت تصویر را به جسم نمایش
 میدهد . مقیاسی عددی ، بایک عدد بیان میکنند که ابعاد چند
 مرتبه کوچک شده اند ؛ مثال : $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، $\frac{1}{1000}$ ، ...

مقیاس خطی عبارت از خطی است که واحد طول را پس از کوچک کردن چند بار بر آن نقل کرده اند و جزء اول سمت چپ آنرا که پاشنه مقیاس میگویند با جزء کوچکتر تقسیم نموده اند (ش ۲)



(ش ۲)

شکل ۲ مقیاس خطی

۱. را نمایش میدهد

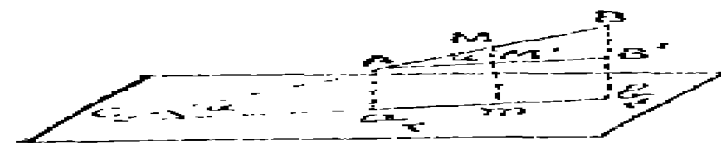
که در آن هر سانتیمتر معرف

۵۰۰ متر است. برای تعیین فاصله دو نقطه در روی نقشه با پرگار

فاصله آنها را بر روی مقیاس نقل نموده میخواهند.

II - خط مستقیم

۱ - تصویر خط مستقیم خط مستقیم است و بوسیله دو



(ش ۳)

نقطه مشخص میشود مانند خط
 $a \text{ و } b$ (ش ۲) اثر خط فصل مشترک
 خط است با تصویرش. شیب خط خلل
 میل خط و اساس یا فراز خط خلل
 تمام آن زاویه است :

$$\text{شیب} = \frac{1}{am} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{BB'}{AB'}$$

$$\text{اساس} = \cot \alpha = \frac{BA}{BB'} = \frac{AM'}{MM'} = am$$

پس اساس خط فاصله تصاویر دو نقطه از خط است
 که اختلاف رقومشان ۱ باشد و شیب عکس اساس میباشد.

خطی را که نقاط صحیح الرقوم بغاصله اساس بر آن معین شده باشد مدراج گویند .

۵ — خط افقی همه جا دارای يك رقوم است . تصویر خط قائم يك نقطه است .

۶ — تسطیح صفحه قائم بر افق یعنی صفحه قائم را حول يك خط افقی بنام لولا یا اندازه ۹۰



(ش ۴)

درجه دورانست دهیم تا موازی صفحه افق شود . اگر رقوم لولا صفر باشد صفحه

قائم بعد از دوران بر صفحه افق منطبق میشود (ش ۵) هر نقطه مانند A از

صفحه قائم بوضع A' در میآید و A' مساوی رقوم نقطه و عمود بر لولا است .

پس برای تسطیح خطی کافیست از دو نقطه آن (ش ۵) دو عمود بر تصویر

خط اخراج کنیم و مساوی رقوم آن نقاط بر عمود ها جدا نمائیم و نقاطی را که

بدست میآیند بهم وصل کنیم .

۷ — عکس عمل تسطیح را ترفیع مینامند .

۸ — تفریق و جمع و اساس خط — فاصله تصاویر دو نقطه که اختلاف رقومشان ۱ باشد اساس خط است (ش ۶) . برای

بدست آوردن شیب عکس اساس را میسازیم .

۹ — تفریق رقوم فقط ای از خط — يك مك تسطیح : تسطیح نقطه را بر تسطیح خط بدست میآوریم



(ش ۶)

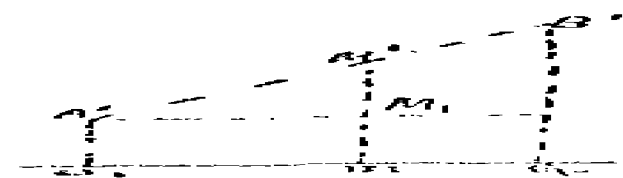
و $M'm$ را که مساوی رقوم T است

اندازه میگیریم .

(۷) یا محاسبه :

$$\frac{M'M'}{BB'} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{am}{ab}$$

یا



(ش ۷)

$$\frac{A \text{ رقوم}}{B \text{ رقوم}} = \frac{am}{ab}$$

رقوم M را که مجهول است بدست میآورند (ش ۷)

عکس مسئله هم بدوراه مذکور قابل حل است .

۱۰ - تعیین زاویه خط با صفحه مقایسه - ۱) یکمک

تسطیح ۲) یکمک محاسبه با استفاده از شیب یا اساس

۱۱ - فاصله دو نقطه - ۱) یکمک تسطیح ۲) یکمک

محاسبه با استفاده از طول تصویر و اختلاف رقوم های دو نقطه .

و ضلع دو خط

۱۲ - دو خط موازی - دارای تصاویر موازی، اساس -

های مساوی و ترقی رقوم در یک جهت هستند .

۱۳ - دو خط متقاطع - تصاویرشان متقاطعه و نقطه تقاطع

در روی هر دو تصویر یک رقوم دارد .

هر گاه تصاویر دو خط ab و cd یکدیگر را در خارج

حدود شکل قطع کنند دو خط ca و bd را رسم میکنیم ، اگر

این دو خط متوازی یا متقاطع باشند دو خط ab و cd متقاطعه

و گرنه متناظرند .

رقوم نقطه تقاطع با محاسبه بدست می آید . بهتر اینست که چهار نقطه دو بدو متحد الرقوم دو خط را بهم وصل کنیم ، اگر دو خط واصل موازی شوند دو خط مفروض متقاطع خواهند بود .

III - صفحه

۱۴ - صفحه با سه نقطه یا دو خط متوازی یا متقاطع مشخص میشود .

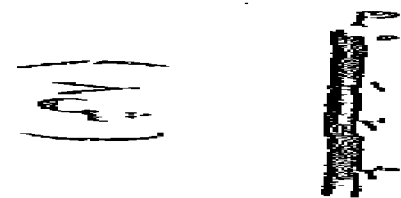
۱۵ - صفحه افقی همه جا يك رقوم دارد . تصویر صفحه قائم يك خط است (اثر صفحه) .

۱۶ - افقیه های صفحه مقاطع آنند با صفحات موازی یا افق . پس همه بنا یکدیگر موازیند . برای رسم يك افقیه کافیست دو نقطه متحد الرقوم از صفحه را بهم وصل کنیم .

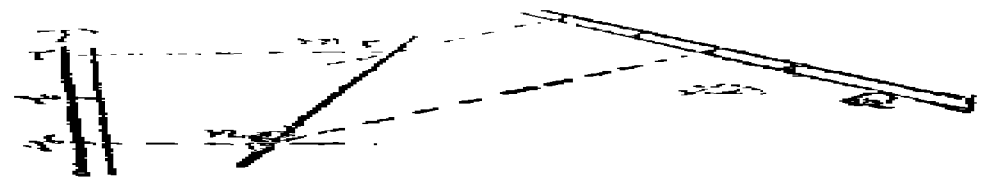
۱۷ - خط ، بزرگترین شیب صفحه آن است که بنا تصویرش بزرگترین زاویه ای را بسازد که خطوط صفحه با تصاویرشان میسازند .

خط بزرگترین شیب صفحه عمودست بر افقیه ها . پس تصویر آن هم بر تصاویر افقیه ها عمودست .

خط بزرگترین شیب پشتهای برای نمایش دادن صفحه کافیست (زیرا امتداد افقیه ها را بدست میدهد) . پس برای نمایش صفحه خط بزرگترین شیب آنرا که مدورج شده باشد دو خط موازی نمایش میدهد (ش ۸) . این خط را مقیاس شیب صفحه میگویند ؟



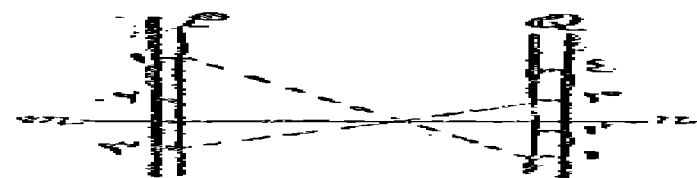
- ۱۸ - توازی خط و صفحه - خط وقتی با صفحه موازیست که بایکی از خطهای آن متوازی باشد .
- ۱۹ - توازی دو صفحه - دو صفحه وقتی متوازییند که دو خط متقاطع یکی با دو خط از دیگری موازی باشند . برای موازی بودن دو صفحه کافیست مقیاس شیبهای آنها متوازی باشند .
- ۲۰ - تقاطع صفحات - برای پیدا کردن فصل مشترک



دو صفحه چهار افقیه دو بدو هم رقوم آن ها را امتداد میدهیم تا همدیگرا در نقطه m و n قطع کنند mn فصل مشترک دو صفحه است (ش ۹)

هرگاه تصاویر مقیاس شیب های دو صفحه موازی باشند چهار نقطه دو بدو متحد الرقوم آنها را بهم وصل میکنیم تا یکدیگر را در تلاقی کنند .

افقیه ای که بر a بگذرد فصل مشترک مطلوب است (ش ۱۰)



(ش ۱۰)

- ۲۱ - تقاطع خط و صفحه - برای بدست آوردن فصل خط مشترک a و صفحه P (ش ۱۱) ، خط a یک صفحه اختیاری مورو میدهیم و بکماک افقیه های ۱ و ۲ آن فصل مشترکش را با صفحه P بدست میآوریم . این فصل مشترک خط a را در m قطع میکند .



(ش ۱۱)

m محل تلاقی a با صفحه P است .

- ۲۲ - خط عمود بر صفحه -

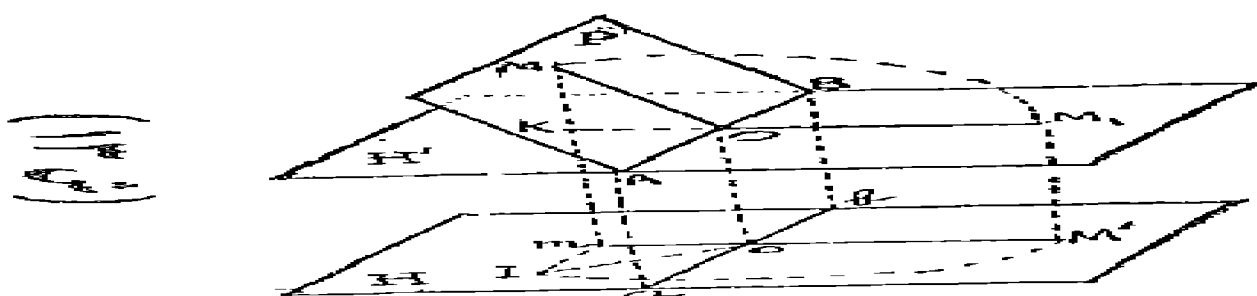
قضیه - اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد تصویرش موازی مقیاس شیب صفحه ، شیبش عکس شیب آن و ترقی رقومش در جهت عکس ترقی رقوم آن میباشد . مانند خط ab و صفحه P (ش ۱۲)



(ش ۱۲)

IV - تسطیح

۲۳ - تسطیح يك شكل مستوی عبارت از آنست که صفحه شکل را حول يك خط افقی خود ، بتمام لولا ، آنقدر دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود .



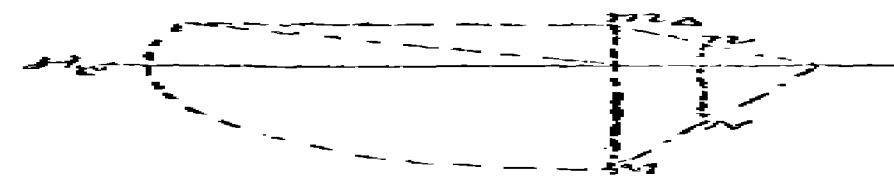
(ش ۲۳)

اگر صفحه P حول افقیه رقوم E AB دوران کند وضع يك نقطه M از آنرا در نظر میگیریم . m تصویر M است و بعد از دوران وضع M' درمیآید (ش ۱۳) که تصویر آن (یا باصطلاح تسطیح M') نقطه M' است .

وترسه بر قاعده $OMP = OM' = OM = OMK$

بعلاوه OM' موازی OM و عمودست بر ab پس تسطیح نقطه بر روی عمود است که از تصویر نقطه بر لولا فرود آید و فاصله آن از لولا مساوی وترسه بر قاعده است که يك ضلعش (KO) مساوی فاصله تصویر نقطه از لولا و ضلع دیگرش (KM) مساوی اختلاف ارتفاع نقطه و لولا باشد .

پس تسطیح نقطه m در حول لولای a و b نقطه M' است (ش ۱۴)



(ش ۱۴)

این قاعده را قاعده سه به سه قائم گویند. چون m و تسطیحش در دست باشند هر نقطه دیگر مانند n (ش ۱۴) را یکمات آن تسطیح میکنیم.

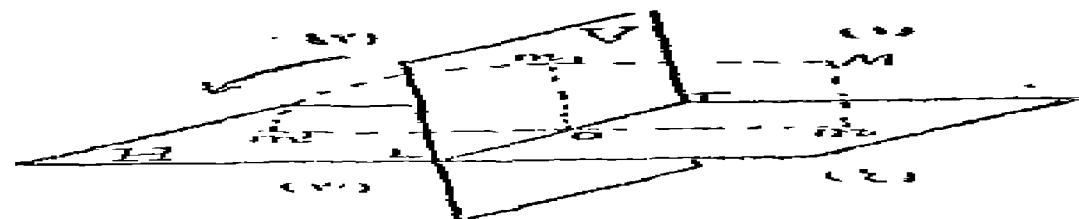
۲۴ — ترفیع عکس عمل تسطیح

است.

۲۵ — برای اینکه در روی شکلی ایضاد و زوایا بمقدار حقیقی معلوم شوند باید آنرا تسطیح کرد.

۲۶ — صفحه را عموداً حول یکی از افقیه های آن تسطیح میکنند.

۷ - اصول هندسه ترسیمی

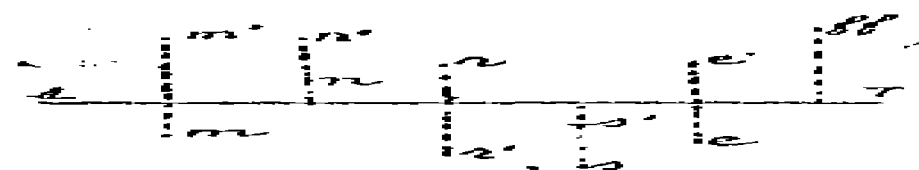


(ش ۱۵)

۲۷ — صفحات تصویر عبارتند از صفحه افقی (H) و صفحه قائم (V) عمود بر آن. I.T. فصل مشترک در صفحه را خط الارض میگویند. فاصله نقطه m از صفحه افق ارتفاع و از صفحه قائم بعد نام دارد.

بالای صفحه افق ارتفاعات مثبت و زیر آن منفی و جلو صفحه قائم بعدها مثبت و عقب آن منفی میباشند همیشه وقتی بالای صفحه افق و در روی صفحه قائم بایستیم در روی فصل مشترک دو صفحه (خط الارض) را طرف چپ و T را طرف راست میخوانیم (ش ۱۵) و اگر این ترتیب عوض شود جهت مثبت بعدها و ارتفاعها تغییر میکنند. پس از اینکه نقطه M را بر

HI و V تصویر کردیم V را در جهت مثلثاتی 90° درجه دوران می‌دهیم تا بر افق منطبق شود و تصویر قائم نقطه بوضع m' در آید. حال چون IT را روی صفحه کاغذ بکشیم بالای آن جای



ارتفاعهای مثبت و بعدهای منفی و زیر آن جای بعدهای مثبت و ارتفاعهای منفی است.

تصاویر قائم و افقی هر نقطه بر روی يك رابط (خط عمود بر IT) واقعند.

تصویر افقی را با حرف كوچك لاتینی و تصویر قائم را با همان حرف با علامت (') نمایش می‌دهند (ش ۱۶).

۷ = نقطه

۲۸ — صفحات تصویر فضا را بچهار ناحیه تقسیم میکنند و ناحیه اول بعد و ارتفاع مثبت نقطه (mn' ، ش ۱۶)، در دوم بعد منفی و ارتفاع مثبت (نقطه nn')، در سوم بعد و ارتفاع منفی (نقطه rr') و در چهارم بعد مثبت و ارتفاع منفی است (نقطه ss').

نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی اول و سوم دارای بعد و ارتفاع مساوی و متحدالعلامه اند یعنی تصاویرشان نسبت به IT قرینه یکدیگرند؟ (ee')، تصاویر نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی دوم و چهارم بر یکدیگر منطبقند، زیرا بعد و ارتفاعشان مساوی و مختلفالعلامه میباشند ff' .

۷ - خط مستقیم

۲۹ - خط مستقیم بوسیله تصاویر قائم و افقی که يك



حرف بزرگ لاتینی خوانده میشوند
 قماش داده میشود. مانند خط AA'
 (ش ۱۷)

۳۰ - خطوط مهم عبارتند از :

خط افقی موازی صفحه افق ، تصویر قائمش موازی
 خط الارض است .

خط جبهی موازی صفحه قائم ، تصویر افقیش موازی
 خط الارض است .

خط قائم عمود بر صفحه افق ، تصویر افقیش يك نقطه
 و تصویر قائمش عمود است بر خط الارض .

خط متصیب عمود بر صفحه قائم ، تصویر قائمش يك نقطه
 و تصویر افقیش عمود است بر خط الارض .

خط نیمرخ عمود بر خط الارض ، تصاویرش بر امتداد
 یکدیگر عمود بر خط الارضند .

خط مواجه موازی خط الارض ، تصاویرش هم موازی
 خط الارضند .

هر خط بوسیله تصاویرش مشخص میشود مگر نیمرخ
 که باید اقلا دو نقطه آن مشخص باشد .

برای حل مسائل مربوط به خط نیمرخ باید آنرا تسطیح
 کرد (رجوع شود به شماره ۶)

۳۱ - نقاط مهم خط عبارتند از :

اثر افقی که برای بدست آوردنش تصویر قائم خط را امتداد میدهم تا خط الارض را قطع کند .
اثر قائم از برخورد تصویر افقی با خط الارض مشخص میشود .

نقطه تلاقی خط و منصف فرجه اول از تلاقی قرینه یکی از تصاویر خط با تصویر دیگر مشخص میشود .
نقطه تلاقی با منصف فرجه دوم از تلاقی تصاویر خط مشخص میشود .

۳۲ — توازی دو خط — تصاویر همنامشان متوازیند .
۳۳ — تقاطع دو خط — تصاویر همنامشان متقاطعتند و دو نقطه تقاطع بر یک رابط واقعند .
برای تحقیق اینکه دو خط که تصاویرشان در خارج حدود شکل متقاطعتند یکدیگر را قطع میکنند یا نه دو نقطه یکی را بدو نقطه دیگری وصل میکنیم ، اگر دو خط که باین طریق بدست میآیند متقاطع یا متوازی باشند دو خط مفروض هم متقاطعتند .
۳۴ — توازی دو نیمرخ نیز بنحویفوق تحقیق میشود .

۴ — صفحه

۳۵ — صفحه مانند هندسه ، با دو خط متقاطع یا متوازی یا سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت یا یک خط و نقطه مشخص میشود .

۳۶ — خطوط مهم صفحه عبارتند از :
اثر افقی ، که تصویر قائمش بر روی خط الارض است .
اثر قائم ، « افقیش » «
این دوائر یا با هم موازیند یا یکدیگر را در روی خود

قطعه می‌کشند .

نمایش صفحه بوسیله آثار بهترین طریق نمایش آنست -
افقیه ها که تصاویر افقیشان موازی اثر افقی است .
جبهیه ها « قائمشان » « قائم است .
 خط اثر گذار این شدید نسبت به صفحه افقی که تصاویر
 افقیش عمودست بر اثر افقی .
 خط اثر گذار این شدید نسبت به صفحه قائم که تصاویر
 قائمش عمودست بر اثر قائم .

۳۷ - صفحات مهم عبارتند از :

صفحه افقی ، اثر افقی ندارد ، اثر قائمش موازی
 خط الارض است .
صفحه جبهیه ، اثر قائم ندارد ، اثر افقی موازی
 خط الارض است .

صفحه قائم ، اثر قائمش عمود بر خط الارض (تصاویر
 افقی جمیع خطوط و نقاطش بر اثر افقی آن واقع میشوند)
صفحه منتهصب ، اثر افقیش عمود بر خط الارض (تصاویر
 قائم جمیع خطوط و نقاطش بر اثر قائم آن واقع میشوند)
صفحه نیمرخ ، آثارش بزرگ امتداد و عمودند بر
 خط الارض

صفحه مواجه ، موازی خط الارض و آثارش هم با آن
 موازی هستند
 مسائل مربوط به صفحه نیمرخ بوسیله تسطیح صفحه حل
 میشوند .

۳۸ — توافقی خط و صفحه — خط وقتی با صفحه موازی است که با یکی از خطوط آن موازی باشد.

۳۹ — خط عمود بر صفحه — تصویری افقیش عمود است بر اثر افقی و تصویری قائمش بر اثر قائم صفحه.

۴۰ — فصل مشترک دو صفحه — فصل مشترک دو صفحه را بوسیله رسم دو صفحه کمکی بدست میآورند بدین طریق که با هر صفحه کمکی يك نقطه از فصل مشترک را تعیین میکنند، صفحات کمکی بیشتر عبارتند از صفحات تصویری، صفحات قائم یا منتصب و افقی یا جبهی.

مثلاً: فصل مشترک دو صفحه که با آثارشان نموده شده باشند (ش ۱۸) يك مك صفحات تصویری - فصل مشترک دو صفحه که هر يك بدو خط متقاطع نموده شده باشند (ش ۱۹)

يك مك دو صفحه افقی - فصل مشترک دو صفحه مواجه (ش ۲۰) كمك يك صفحه قائم - فصل مشترک

خط و صفحه

بر خط يك صفحه فرعی مرور میدهیم (معمولاً قائم یا منتصب)، فصل مشترک دو صفحه خط مفروض را در نقطه OO قطع میکنند (ش ۲۱)، این نقطه فصل مشترک خط و صفحه است.

(ش ۱۸)



(ش ۱۹)

(ش ۲۱)



ع - تغییر مکانها

ع ۲ - مقصود از تغییر مکان دادن يك

شكل مستوی اینست كه آنرا با يك

صفحه تصویر (یا يك صفحه تصویر

موازی آن) قرار دهیم تا تصویر جدید

شكل با خود آن مساوی شود و بتوانیم

از روی آن خواص و ابعاد و زوایای

شكل را مطالعه کنیم . تغییر مکانها بر سه قسمند : تغییر صفحه،

دوران ، تسطیح .

۱ - تغییر صفحه

ع ۳ - در تغییر صفحه صفحه افقی یا قائم تصویر را موازی

صفحه شكل قرار میدهیم و صفحه دیگر ثابت میماند . هر تغییر صفحه

یوشیله وضع جدید خط الارض مشخص میشود .

۱ - تغییر صفحه افقی - در این تغییر چون صفحه قائم تغییر

نمیکند تصاویر قائم نقاط و بعدهای آنها ثابت میمانند و فقط تصاویر

افقی و ارتفاعات تغییر میکنند . پس برای بدست آوردن تصاویر

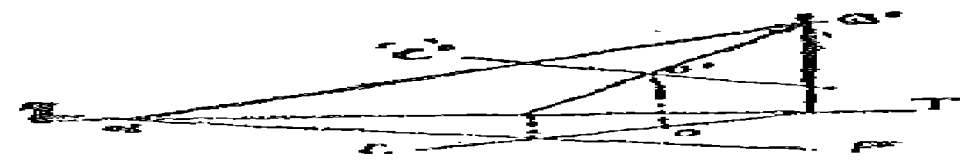
افقی جدید باید از تصاویر قائم (كه ثابتند)

عمودهای بر خط الارض جدید كشید و پس

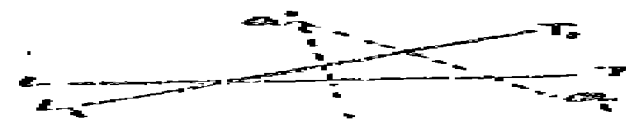
آنها ابعاد را (كه ثابتند) جدا نمود (ش ۲۲) .

ب - تغییر صفحه قائم - در این تغییر

صفحه تصاویر افقی و ارتفاعات ثابت میمانند

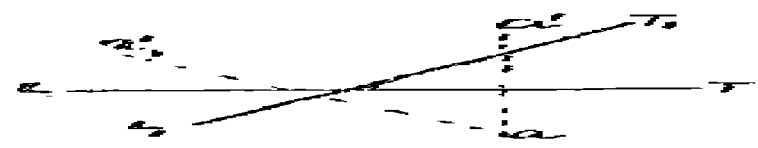


(ش ۲۱)



« ش ۲۲ »

و تصاویر قائم و ارتفاعات تغییر میکنند (ش ۲۳)



(ش ۲۳)

پ — تغییر صفحه مضاعف — یعنی
اول یکی از صفحات تصویر و بعد صفحه
دیگر را تغییر داد. این عمل تر کیب دو
عمل سابق است. مثلاً دو شکل ۲۴ نخست
صفحه افق و بعد صفحه قائم را تغییر
میدهم.



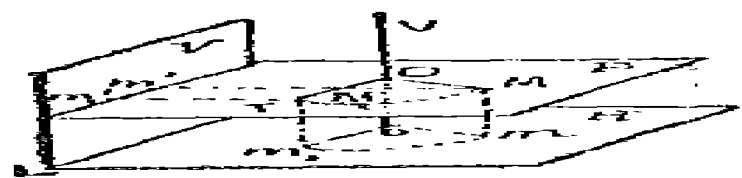
(ش ۲۴)

توجه کنید! — در مومع تغییر
صفحه بسایند متوجه علامت

بعدها و ارتفاعات و وضع خط الارض جدید بود یعنی اگر A طرف
چپ خط الارض قرار داده شود بعد های مثبت زیر و ارتفاعات
مثبت بالای آن واقع میشوند، و اگر A را طرف راست
بگذاریم عکس این ترتیب خواهد شد.

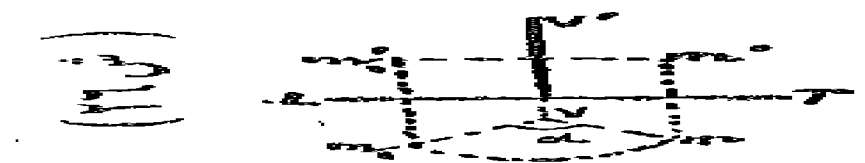
- ۴۴ - صفحه افقی (یا قائم) را موازی خطی باید
قرار داد - خط افقی (یا جبهی) میشود، پس خط الارض جدید باید
موازی تصویر قائم (یا افقی) خط مفروض قرار داده شود.
- ۴۵ - صفحه افقی (یا قائم) را عمود بر صفحه ای باید
قرار داد - صفحه قائم (یا منتصب) میشود، پس خط الارض
جدید باید عمود بر اثر قائم (یا افقی) صفحه اختیار شود.
- ۴۶ - خطی را عمود بر صفحه افقی (یا قائم) باید
قرار داد - نخست باید خط را موازی صفحه قائم (یا افق) کرد
بعد A را عمود بر صفحه افقی (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف)

۴۷ - صفحه‌ای را عمود بر صفحه افق (یا قائم) باید قرار داد به نحوی که باید صفحه را عمود بر صفحه قائم (یا افق) کرد بعد موازی صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).



پس در دوران نقطه حول محور قائم تصویر افقی بمقدار حقیقی دوران میکنند و تصویر قائم در روی خطی موازی خط الارض تغییر مکان میدهد (ش ۲۵).

پس در دوران نقطه حول محور قائم تصویر افقی بمقدار حقیقی دوران میکنند و تصویر قائم در روی خطی موازی



IT حرکت مینماید (ش ۲۶) و در دوران حول محور ممتد تصویر قائم بمقدار حقیقی دوران نموده تصویر افقی موازی خط الارض تغییر مکان میدهد.

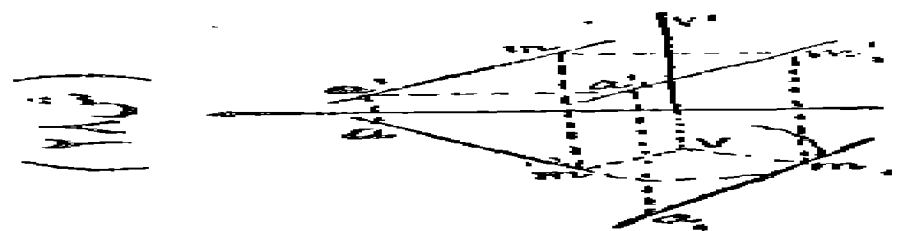
۳۹ - دوران خط - البته برای دوران خط کافیست دو نقطه آنرا دوران داد (ش ۲۷).



(ش ۲۷)

با ab مساویست. و دیگری اینست که عمود مشترک محور و خط را رسم کنیم و موقع آن آنرا با اندازه زاویه مطلوب دوران

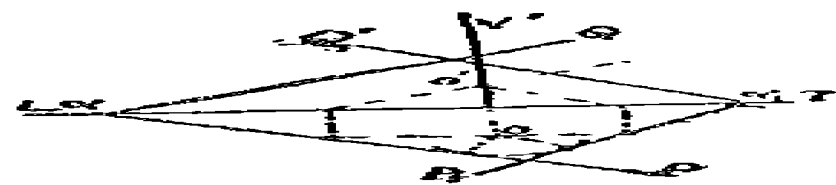
دهیم و وضع جدید خط را بوسیله رسم عمود بر وضع جدید عمود مشترک مشخص کنیم. آنگاه تصویر قائم را بوسیله تعیین اوضاع جدید تصاویر نقطه دیگر معین نماییم (ش ۲۸)



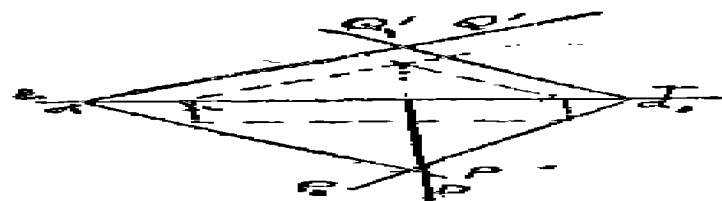
(ش ۲۸)

۵۰ - دوران صفحه - باید یک نقطه و یک خط از صفحه را دوران داد. ولی معمولاً نقطه تلاقی محور یا صفحه را که حین دوران ثابت میماند در نظر گرفته یک خط از صفحه را (معمولاً اثر قائم را اگر محور قائم باشد و اثر قائم را اگر محور منتهی‌ب

باشد) باندازه زاویه مطلوب دوران میدهیم. اگر یکی از آثار را دوران دهیم برای تعیین اثر جدید دیگر از امتداد جهه یا افقیه‌ای که بر محل تلاقی محور و صفحه میگذرد استفاده میکنیم (ش ۲۹ و ۳۰)



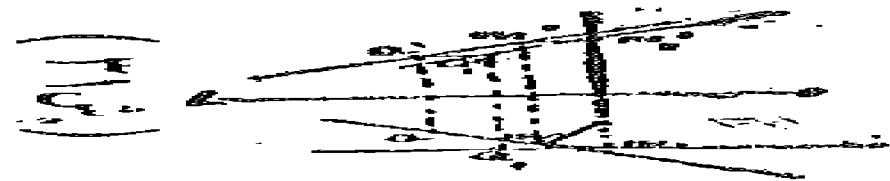
(ش ۲۹)



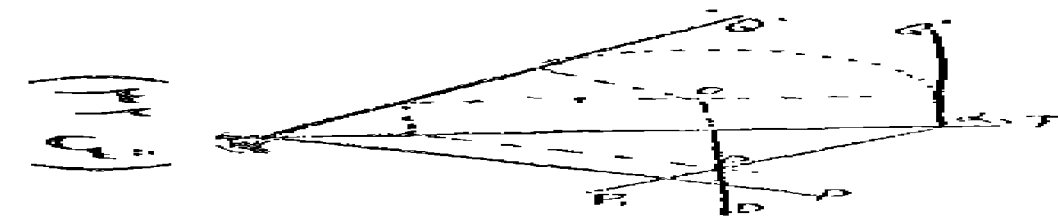
(ش ۳۰)

۵۱ - خطی را دوران دهید تا جهه‌په شود باید تصویر افقی خط موازی خط الارض گردد. پس

باید خط را حول محور قائم دوران داد تا وقتی تصویر افقیش موازی LT شود (ش ۳۱) ۵۲ - صفحه‌ای را دوران دهید تا قائم شود



باید اثر قائم بر خط الارض عمود گردد. پس باید صفحه طول محور منتصب T نقدر دوران کند که اثر قائمش بر LT عمود شود. (۳۲) ۵۳ - توجه کنید!



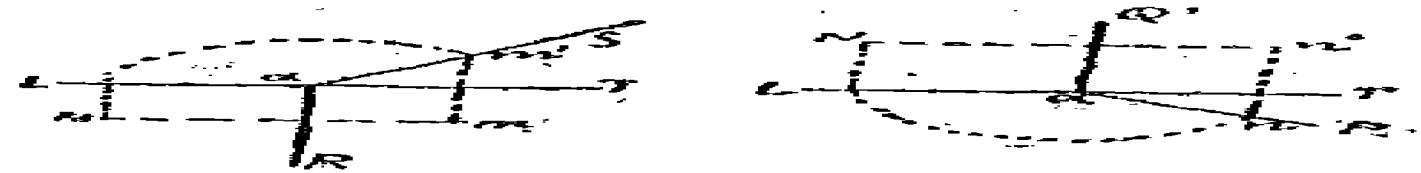
برای اینکه خطی موازی یا صفحه‌ای عمود بر يك صفحه تصویر شود يك دوران یا يك تغییر صفحه لازم است و برای اینکه خطی عمود یا صفحه‌ای موازی يك صفحه تصویر شود باید دوران یا دو تغییر صفحه داد یعنی اول خط را

موازی يك صفحه تصویر و بعد عمود بر صفحه دیگر نمود یا اول صفحه را عمود بر يك صفحه تصویر و بعد موازی با صفحه دیگر کرد.

پ - مسطح

۵۴ - مسطح یعنی موازی قرار دادن يك شكل مستوی یا صفحه افق یا صفحه قائم.

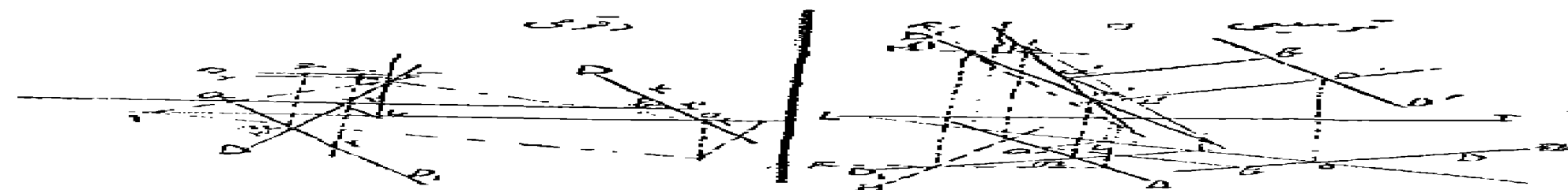
برای این کار باید صفحه شكل را حول يك خط افقی یا جبهی بنام لول اول یا نقدر دوران داد تا موازی صفحه افق یا قائم شود. مسطح هر نقطه بر روی عمود نیست که از تصویر آن بر لولا فرود آید و فاصله اش از لولا و ترسه بر قائم نیست که يك ضلع آن فاصله تصویر آن نقطه از لولا و ضلع دیگرش اختلاف



(ش ۳۶)

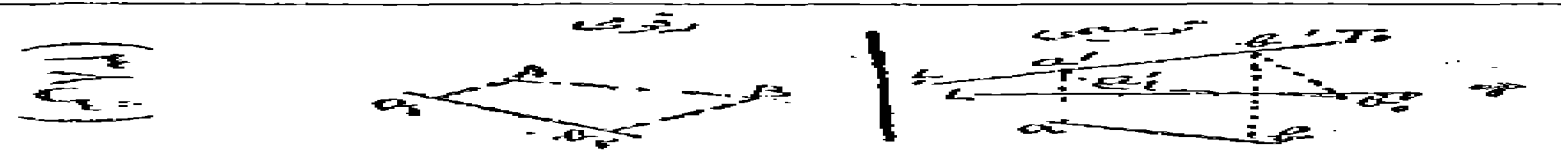
۴ - موارد استعمال

۶۰ - عمود مشترک دو خط - برای رسم عمود مشترک دو خط Δ و Δ' بر صفحه‌ای موازی Δ' می‌گذرانیم و از یک نقطه M از Δ عمودی بر آن صفحه فرود می‌آوریم تا T آنرا در Δ قطع کند، از A خطی موازی Δ' می‌کشیم تا B را در Δ قطع نماید خط BC که موازی MA رسم شود جواب مسئله است.

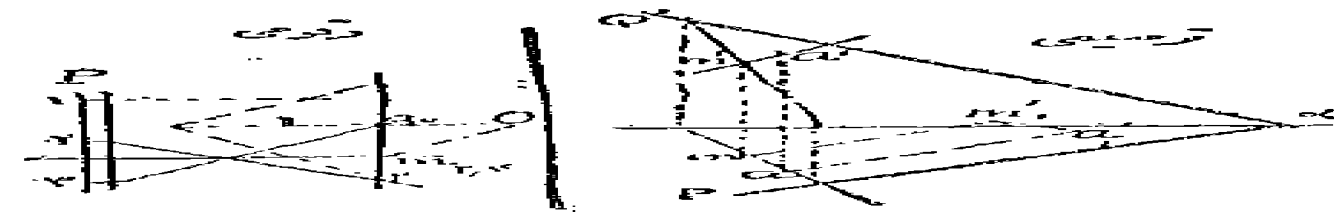


(ش ۳۷)

۶۱ - فاصله دو نقطه A و B - در ترسیمی یکمات تغییر صفحه یا دوران و در رومی بوسیله تسطیح خط و اصل بین دو نقطه معلوم میشود (ش ۳۸)



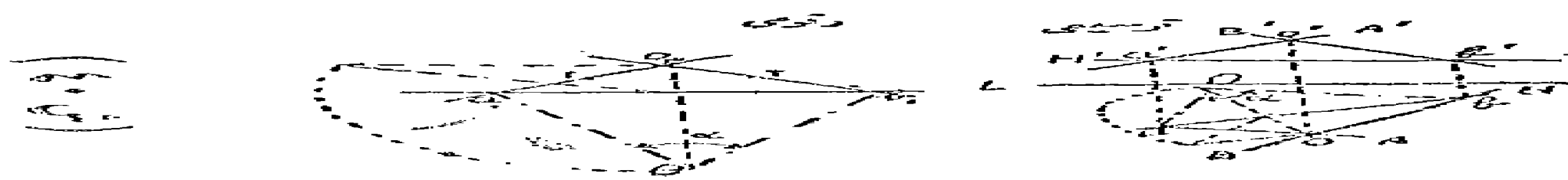
۶۲ - فاصله نقطه A از صفحه IP - عمود AO را که موقع آن در صفحه O است بر IP وارد آورده فاصله نقاط A و P را معین میکنیم (ش ۳۸)



(ش ۳۹)

۶۳ - فاصله نقطه از خط - صفحه ای بر خط عمود کرده O نقطه برخورد را بدست میآوریم و فاصله NT از O را اندازه میگیریم -

۶۴ - زاویه دو خط - بوسیله تسطیح دو خط موازی صفحه تصویر قرار داده میشوند (ش ۴۰)



(ش ۴۰)

۶۵- زاویه خط و صفحه - یعنی زاویه خط با تصویرش بر صفحه .

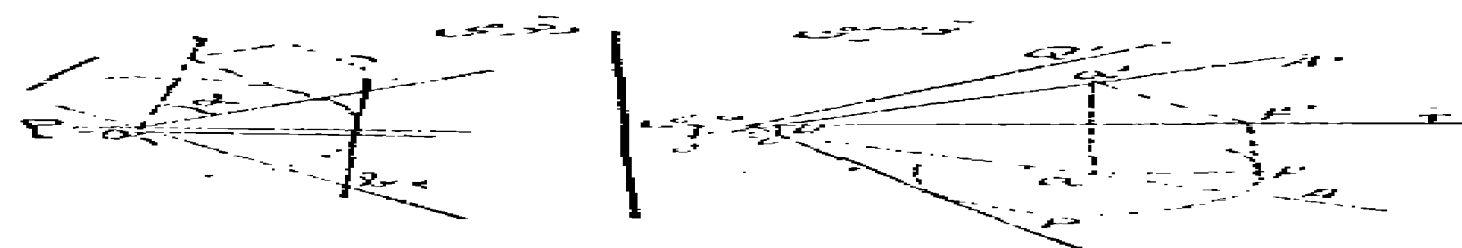
۶۶- زاویه دو صفحه - صفحه ای بر فصل مشترك آنها عمود نموده فصل مشترك آنرا با هر يك از آن دو پیدا میکنیم (ش ۴۱)، زاویه بین دو فصل مشترك زاویه بین دو صفحه است



(ش ۴۱)

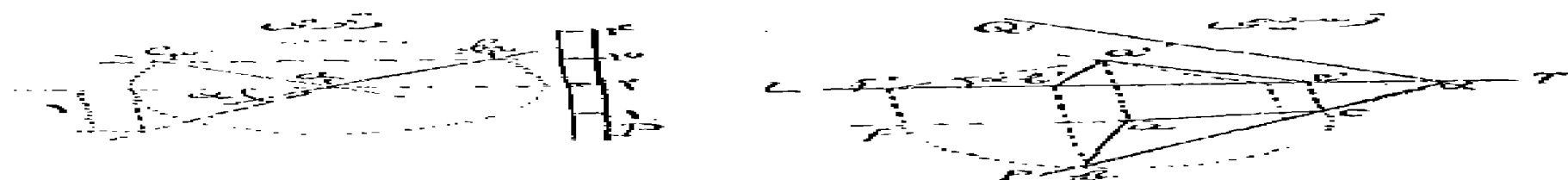
۶۷- بر خطی صفحه ای بگذرانید که با صفحه افق زاویه α تشکیل دهد .

هندسه رقومی : بر کتر α و شعاع برابر $\cot \alpha$ دایره ای میزنیم و از $b\alpha$ مماسی بر آن دایره رسم میکنیم، شعاعی از دایره که بر این مماس عمود شود مماس شیب صفحه معلوم است (ش ۴۲) هندسه ترسیمی : $b\alpha$ اثر افقی خط $\triangle\alpha$ را تعیین میکنیم از يك نقطه $a\alpha$ چپیه ای که با صفحه افق زاویه α بسازد رسم نموده $cc\alpha$ اثر افقی آنرا بدست میآوریم ، بر کتر α و شعاع ac دایره ای ترسیم نموده از a مماسی بر آنست رسم میکنیم این مماس اثر افقی صفحه معلوم است (ش ۴۲) اثر قائم آن بر اثر قائم خط $\triangle\alpha$ نیز میگردد .



(ش ۴۲)

۶۸ — در صفحه‌ای از یک نقطه خطی رسم کنید که با صفحه‌افق زاویه α بسازد .
 هندسه رقومی — بر کوزه شعاع $\alpha = \cotg p$ دایره‌ای میزنیم تا افقیه رقوم ۲ صفحه را در a و c قطع کند، ab و ac دو جواب مسئله‌اند (ش ۴۳)

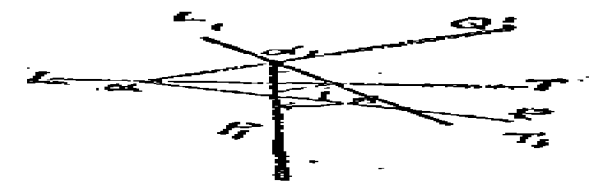


(ش ۴۳)

هندسه ترسیمی : از aa' چپیه ای رسم میکنیم که با افق زاویه α بسازد ، aa' را افقی آنرا بدست می آوریم بر کوزه شعاع α دایره ای میزنیم تا aa' را در a و c قطع کند در ab و ac جوابهای مسئله‌اند (ش ۴۳)

۶۹ - زاویه صفحه با صفحات تصویر - هندسه رقومی: برای تعیین زاویه صفحه P با صفحه افق کافیت زاویه تسطیح مقیاس شیب صفحه را با تصویر آن بدست آورد (ش ۴۴).

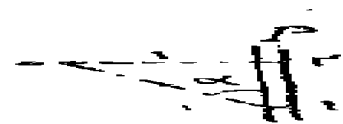
هندسه ترسیمی: برای اینکه زاویه صفحه P را با صفحه افق (قائم) تعیین کنیم بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) آن را بصفحه منتصب (قائم) تبدیل میکنیم و زاویه اثر قائم (افقی) را با خط الارش اندازه میگیریم (ش ۴۵، ۱ و ۲).



ش ۴۵



۱



ش ۴۶

۷۰ - زاویه خط با صفحات تصویر

هندسه رقومی: زاویه خط و تسطیح آن.

هندسه ترسیمی: برای آنکه زاویه خط DD را با صفحه افق (قائم) تعیین نماییم آن را بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) تبدیل بصفحه چپه (افقی) میکنیم و زاویه تصویر قائم (افقی) را با خط الارش اندازه میگیریم.

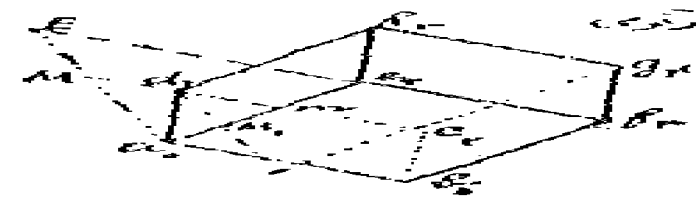
۷۱ - نمایش چند روها: برای آنکه چند روی را بوسیله تصاویرش نمایش دهند تصاویر رؤس و اضلاع را

رسم میکنند. تصاویر تمام رؤس و اضلاع در داخل خط شکسته مسدودی واقعند که دوره ظاهری نامیده میشود.

خطوط واقع در درون دوره ظاهری و رئی و بعضی مخفی میباشد *

برای تشخیص خطوط رئی از مخفی فرض میکنیم چشم بقاصله بی نهایت دور از صفحه تصویر واقع باشد در نتیجه خطی که از محل تقاطع ظاهری دو خط واقع در درون دوره ظاهری به جسم وصل شود بر صفحه تصویر عمود میشود. این خط دو یال جسم را که تصاویرشان متقاطعند قطع میکند، هر يك از دو یال که نقطه تقاطع آن از صفحه تصویر دور تر باشد رئی و دیگری مخفی است. پس از دو یال متناظر که تصاویرشان متقاطع باشند در تصویر افقی آنکه ارتفاع نقطه تقاطع (و در تصویر قائم این که بعد نقطه تقاطع) بر آن بیشتر است رئی است. هر یال که بیک نقطه غیر رئی و هر صفحه که بیک یال غیر رئی محدود گردد غیر رئی میباشد.

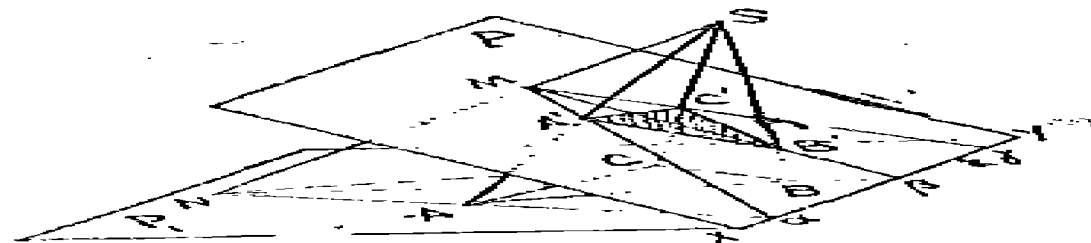
مثال :



(ش ۶۷)

ارتفاع m روی Cd کمتر است تا روی ae ، پس ae و در نتیجه fe و eh مرئی هستند .

۷۲ - مقطع اجسام - مقطع هر صفحه در يك چند رو چند بری است که رؤسش فصل مشترك بالهای چند رو یا صفحه و اضلاعش فصل مشترك روهای جسم با صفحه اند . پس برای بدست آوردن مقطع بدو طریق میتوان عمل کرد : (۱) تعیین رؤس (۲) تعیین اضلاع .



(ش ۴۷)

ب - تعیین رؤس - اگر بخواهیم فصل مشترك صفحه P (ش ۴۷) را با هرم $SABC$ پیدا کنیم xy فصل مشترك P با قاعده جسم را بدست میآوریم بعد خطی بر S میگذرانیم تا P و صفحه قاعده را در M و N قطع کند از N به رؤس قاعده وصل نموده امتداد میدهیم تا xy را در α و β قطع نمایند از α و β به N وصل میمائیم تا بالهای منتهی بر رؤس وابسته را تلاقی نمایند این نقاط رؤس مقطهند .

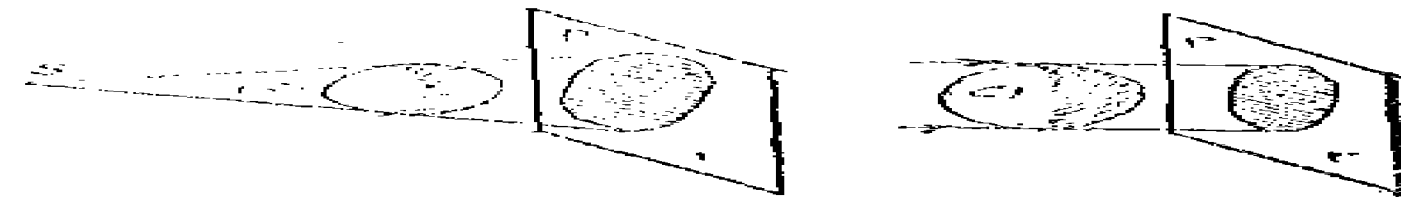
ب - تعیین اضلاع - در این طریقه باید فصل مشترك یکایک روهای جسم را با صفحه قاطع بدست آوریم؛ قسمتی از فصل مشتركها که در خارج و جوه جسم واقع شوند جزء مقطع نیستند .

۷۳ - فصل مشترك خط \triangle با يك جسم، که نقاط ورود و خروج آوردن فصل مشترك خط \triangle با يك جسم، که نقاط ورود و خروج

خط در جسم نامیده میشوند ، بر \triangle صفحه اختیاری گذرانیده
مقطع آنرا با جسم بدست میآوریم ، نقاط برخورد \triangle با محیط
مقطع نقاط معلویند .

اگر جسم دارای رأس باشد ، مانند هرم ، صفحه فرعی
را عموماً بر رأس جسم میگذارند و هرگاه جسم بالهای موازی
داشته باشد ، مانند منشور ، صفحه فرعی را معمولاً بموازات آن
یال مرور میدهند و در هر حال نقاط مشترک صفحه فرعی را با
محیط قاعده جسم بدست آورده از نقاط تقاطع برأس (در
(حالت اول) وصل میکنند ، یا خطوطی موازی یال (در حالت
دوم) میکشند تا \triangle را قطع کنند ، نقاط تقاطع محل تلاقی خط
با جسم میباشد .

۷۴ — سایه ها — اگر جسمی در مقابل يك نقطه نورانی
(ش ۴۸، ۱) یا در سر راه يك دسته شعاعهای نورانی (ش ۴۸، ۲) قرار
گیرد قسمتی از خود جسم تاریك است (سایه خاص) و
قسمتی از هر صفحه كه در مقابل جسم باشد نیز در سایه است
(سایه منتقل)



ش ۴۸

اشعه ای كه بچشم میتابند در صورت اول مخروط و در

صورت دوم استوانه‌ای تشکیل می‌دهند که مخروط یا استوانه سایه نام دارند .

در حالت اول سایه را مشعلی و در حالت دوم آفتاب را شمسی می‌نامند .

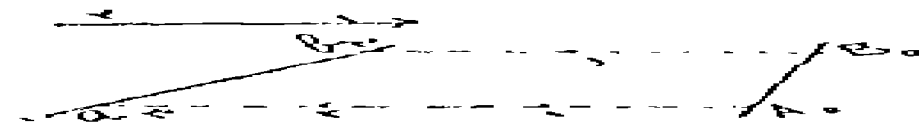
دوره ظاهری سایه منتقل سایه خطی است که مخروط یا استوانه سایه در امتداد آن بر جسم مماس گردیده است . سایه سایر رؤس و یالهای جسم در داخل دوره ظاهری واقع میشوند . از دو یال متناظر که سایه های آنها در درون دوره ظاهری سایه متقاطع میشوند یکی روشن و دیگری تاریک است . برای تشخیص آن که روشن است فصل مشترک شعاع نورانی منتهی بنقطه تقاطع سایه ها را با یالها بدست می‌آوریم یالی که نقطه تقاطعش بمنبع نور نزدیکتر باشد روشن است .

اگر سایه منتقل یالی در داخل دوره ظاهری واقع شود بر حسب آنکه یال روشن یا تاریک باشد دو روی منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

در صورتیکه سایه رأسی درون دوره ظاهری افتد بر حسب آنکه رأس روشن یا تاریک باشد یالهای منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

مثالی - سایه منتقل را بر موازات امتداد تیر بر صفحه تصویر معین کنید .

رقومی

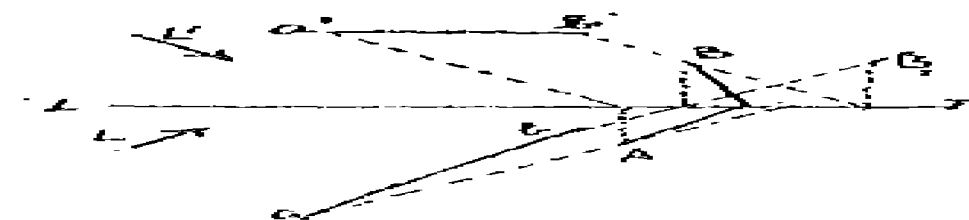


ش ۴۹

تریسیمی

ممکن است قسمتی از سایه یک یال، مانند aa' ، بر صفحه افق و قسمتی بر صفحه قائم افتد. برای تشخیص آن باید خطی را عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم A سایه aa' بر صفحه افق و B سایه aa' بر صفحه قائم واقع شود و B سایه a' را فرض این که صفحه قائم نباشد بر افق تعیین می‌کنیم. A و B خط الارض را در نقطه می‌کنند، Aa قسمتی از سایه یال BA واقع بر صفحه افق و Ba قسمتی از آن واقع بر صفحه قائم است (ش ۵۰)



ش ۵۰

مکانیک

۱. -- بردارها -- عزم

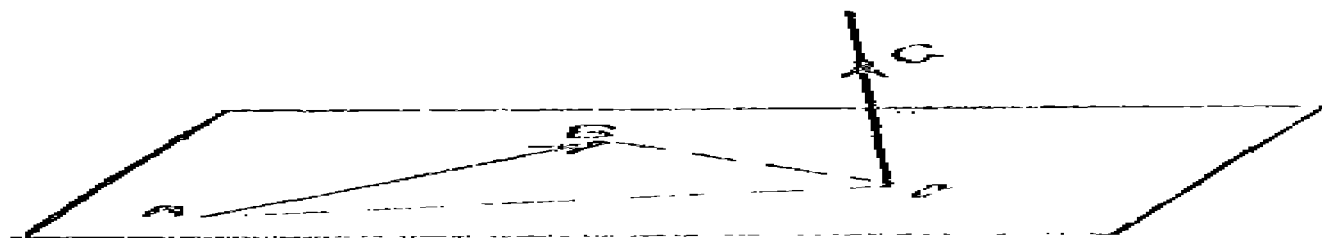
۱ -- بردارها -- صفحه ۱۹۳ شماره‌های ۱۳۶ تا ۱۴۴ مراجعه شود.

۲ -- جهت دوران - اگر شخصی در امتداد مجوری بطریقی قرار گیرد که سرش بطرف مثبت محور متوجه باشد برای او جهت مثبت دوران جهت حرکت از چپ بر راست است این جهت را مستقیم و مخالف آنرا معکوس گویند .
دو بردار متعامد نسبت بهم مستقیمند موقعی که اگر شخصی در امتداد یکی از آنها قرار گیرد بطوری که سرش بطرف انتهای بردار متوجه باشد و بردار دیگر را نگاه کند جهت بردار دوم نسبت باو از چپ بر راست باشد . در غیر این حال دو بردار نسبت بیکدیگر معکوسند .

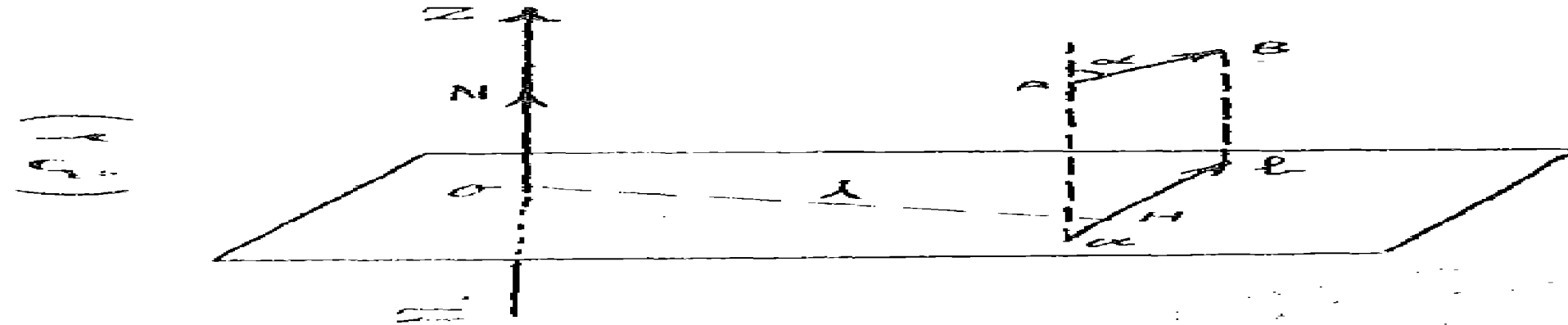
۳ -- عزم مرکزی - عزم بردار AB نسبت بنقطه O $M_O(AB) = (O)O$

بردار دیگری است مانند $(O)C$ (ش ۱) که :

(ش ۱)



- (۱) مبدأ T آن نقطه O می باشد .
 (۲) محمولش عمودی است که از نقطه O بر صفحه OAB اخراج شود .
 (۳) جهتش نسبت به بردار AB مستقیم است .
 (۴) طولش بحسب عدد دو برابر مساحت مثلث OAB است .
 ۴- عزمهای دو بردار متقابل نسبت به یک نقطه دو بردار متقابلند .
 ۵- عزم یک بردار تغییر نمی کند اگر: (۱) بردار بر محمولش حرکت نکند (۲) مبدأ T ثابت بوده انتهایش بر خطی موازی OA تغییر مکان دهد .
 ۶- اگر مرکز عزم بر بردار منطبق یا طول بردار صفر باشد عزم آن صفر است .
 ۷- عزم محوری - عزم بردار (AB) نسبت به محور ZZ' عبارتست از عزم تصویر قائم (AB) بر صفحه ای که بر ZZ' عمود باشد نسبت به نقطه تقاطع ZZ' با T نصفه (ش ۲) و اینطور نوشته میشود:



در این صورت که AB بردار عمود بر ZZ' باشد $\alpha = 90^\circ$ و عزم M خواهد بود و اگر AB موازی ZZ' باشد $\alpha = 0^\circ$ و عزم صفر خواهد بود.

$$M_{zz} \cdot (AB) = M_0(ab) = ON$$

حال اگر α و λ به ترتیب زاویه بردار AB و محور و طول عمود مشترك بردار AB و محور z/z' باشند :

$$ON = AB \cdot \lambda \cdot \sin \alpha$$

۸ - عزم محوری يك بردار تغییر نمی‌کند هرگاه : (۱) بردار بر محصل خود حرکت نکند (۲) سطح تصویر تغییر نماید .

۹ - عزم محوری يك بردار صفر است وقتی : (۱) طول بردار صفر باشد (۲) بردار و محور در يك صفحه باشند .

۱۰ - قضیه - تصویر قائم عزم مرکزی يك بردار بر محور است .
محوری که بر مرکز عزم بگذرد مساوی عزم بردار مفروض نسبت باین محور است .

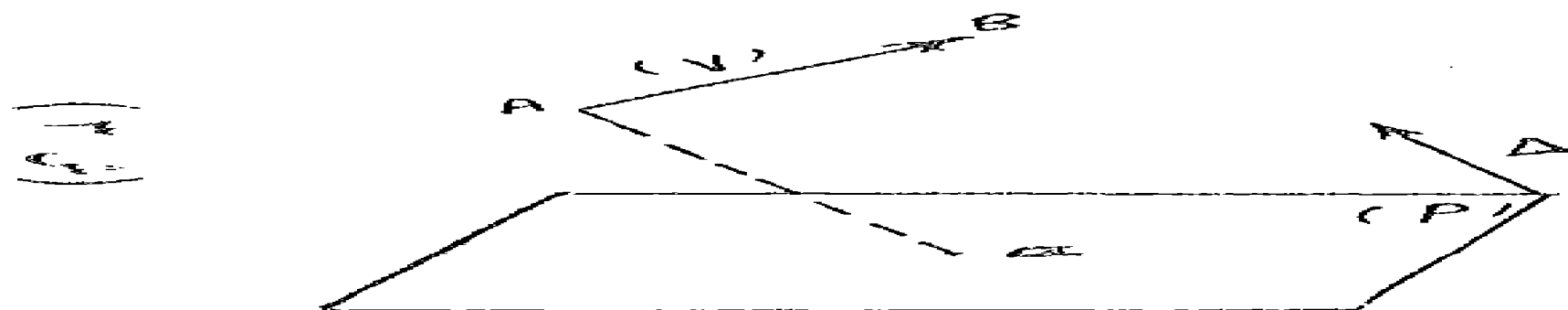
۱۱ - قضیه واریغون (Varignon) - عزم برآیند یکجداست بردار متقارب مساوی برآیند عزمهای بردارهای مفروض است .

۱۲ - تهریف - برآیند عزمهای دو بردار زوج نسبت بیک نقطه را محور زوج مفروض گویند .

۱۳ - قضیه - محور يك زوج برداری است ثابت .

۱۴ - عزم بردار نسبت به صفحه هرگاه صفحه I و امتداد \triangle داده شده باشند عزم هر بردار (V) نسبت به صفحه I عبارت است از حاصلضرب مقدار چبری بردار (V) در مقدار چبری فاصله نقطه اثر آن از صفحه وقتی که فاصله اخیر بموازات امتداد \triangle اندازه گرفته شده باشد (ش ۳)

$$M_P(V) = (V) \cdot \Delta a$$



اندازه چبری فواصل نقاط اثر در بالای صفحه مثبت و در زیر آن منفی هستند .
اگر بردار در حول نقطه اثر خود دوران کند در عزم آن نسبت به صفحه P تغییری حاصل نمی شود ، اما اگر بر سر محل خود حرکت نماید عزم آن تغییر میکند .

علم الحركات (Cinematique)

۱ - تعاریف

- ۱ - سکون و حرکت — وقتی فاصله نقطه M از نقاط مختلف جسم صلب Δ تغییر نکند M نسبت به آن جسم ساکن است والا متحرک است .
- ۲ - موضوع علم الحركات بحث در حرکت است بدون توجه به علل پیدایش آن .
- ۳ - معادله زمانی متحرک به رابطه (۱) $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ را

معادله زمانی متحرك گویند (۵) مسافت مطویه و (۱) زمان
(حرکت است)

۴ — مسیر حرکت — راهی را که نقطه متحرك در فضا طی میکند مسیر متحرك نامند. بر حسب آنکه مسیر مستقیم یا منحنی باشد حرکت ، مستقیم الخط یا منحنی الخط است .

II — حرکت مستقیم الخط متساویه

۵ — تهر یف — هر گاه متحرك بر مسیر مستقیمی تغییر مکان دهد و در يك جهت مسافتی متناسب با زمان پیماید حرکتش مستقیم الخط متساویه است .

۶ — معادله حرکت — هر گاه (۵) مسافت مطویه ، زمان ، s مسافت اولیه (فاصله از مبدأ حرکت در لحظه $t=0$) و سرعت حرکت باشد :

$$s = s_0 + vt$$

۷ — بردار سرعت — محمولش مسیر حرکت ، میدعاش نقطه متحرك ، جهتش بر حسب آنکه سرعت مثبت یا منفی باشد در جهت حرکت یا مخالف آنست . قدر مطلق آن مسافتی است که متحرك در واحد زمان پیماید .

۸ — قضیه — هر حرکت مستقیم الخطی که معادله اش از درجه اول باشد متساویه است .

III — حرکت مستقیم الخط متسری

۹ — تهر یف و قتی متحرك بر مسیر مستقیمی در زمانهای

متساوی مسافت غیر مساوی طی کند حرکتش مستقیم الخط متغیر است .

۱۰ — معادله حرکت از درجه اول بر حسب t و عیار تست
 $s = f(t)$

۱۱ — حامل سرعت — بر مسیر واقع است و مبدأش نقطه متحرك و جهتش اگر مثبت باشد در جهت مسیر و الا بر خلاف آنست. قدر مطلق آن مشتق s یعنی $f'(t)$ می باشد. $v = f'(t)$ می باشد.
 ۱۲ — حامل شتاب بر مسیر واقع و قدر مطلقش مشتق ثانی s یعنی $f''(t) = a$ می باشد ، جهتش در صورتیکه a یا v صعودی باشد در جهت مثبت مسیر و الا بر خلاف آن است .

۱۳ — حرکت را مسرعه گویند اگر سرعت از جهت قدر مطلق ترقی کند و الا مبطئه نامند .

۱۴ — دیاگرام حرکت سه منحنی نمایش تغییرات s و v و a را که نسبت بدو محور OS و OA رسم شوند دیاگرام حرکت نامند .

IV — حرکت متشابه التغییر

۱۵ — تعریف — وقتی سرعت تابع درجه اولی نسبت بر زمان باشد حرکت مستقیم الخط متشابه التغییر است .

۱ — معادله حرکت

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$a = \text{مقدار ثابت}$$

۲ — سرعت :

۳ — شتاب :

اگر $\gamma = 0$ باشد حرکت مسرعه و اگر $\gamma < 0$ باشد محیطی است.

۴- مقدار سرعت بر حسب مسافت:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma(s - s_0)}$$

۵- حرکت گشتی نوسانی ساده

۱۶- تهریق - اگر متحرک M بر محیط دایره‌ای بشعاع R حرکت متشابه داشته باشد تصویرش بر خطی که در صفحه همین دایره واقع باشد دارای حرکت نوسانی ساده خواهد بود.

۱- حرکت نوسانی ساده حرکت مستقیم الخطی است متناوب و بمعادله:

$$x = R \cos(\omega t + \alpha)$$

۲- دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ؛ توانر: $n = \frac{1}{T}$

۳- سرعت: $v = R \omega \sin(\omega t + \alpha)$

۴- شتاب: $a = -R \omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$

۵- پس از حذف t در روابط فوق:

$$v^2 = \omega^2 (R^2 - x^2) \quad a^2 = \omega^4 (R^2 - x^2)$$

VI - حرکت هتختی الخط متشابه

۱۷- قضیه - تصاویر حاملهای سرعت و شتاب حرکت

متحرک M بر هر محور سرعت و شتاب حرکت تصویر متحرک NE است بر آن محور.

۱۸ — مشخصات حرکت

اگر s مسافت طی شده در روی منحنی t ، زمان x ، y ، z ، مختصات متحرك v ، سرعت v_x ، v_y ، v_z ، تصاویر سرعت بر محورها، γ شتاب γ_x ، γ_y و γ_z تصاویر شتاب بر محورها باشند:

۱ — معادله زمانی حرکت:

$$s = r(t)$$

$$v = r'(t)$$

$$\gamma = r''(t)$$

۲ — مختصات زمانی متحرك

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

$$v_x = f'(t)$$

$$v_y = g'(t)$$

$$v_z = h'(t)$$

$$v = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

$$\gamma_x = f''(t) \quad \gamma_y = g''(t) \quad \gamma_z = h''(t)$$

$$\gamma = \sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2 + h''(t)^2}$$

۱۹ — هدگرافی — اگر از نقطه A در هر لحظه

برداري همسنگ سرعت رسم کنیم انتهای این بردار منحنی‌ای می‌پیماید که هدگراف نام دارد، پس هدگراف مکان هندسی انتهای بردارهایی همسنگ سرعت است که از يك مبدأ رسم شده باشند.

VII. حرکت همسنگ پیوسته

۲۰ — تعریف — وقتی مسیر متحرك دایره یا قوسی از آن

باشد حرکت را مستدیر گویند .

۱ - معادله حرکت - اگر O اندازه زاویه مرکزی $A.O.M$ بر حسب رادیان و A مبدأ قوس s و O مرکز و R شعاع دایره و M متحرک مفروض و s_0 مسافت اولیه باشد :

$$s = R\theta - s_0 \quad \text{و} \quad \theta = \varphi(t)$$

۲ - مختصات نقطه M نسبت به محور OA و محور عمود بر آن :

$$x = R \cos \theta \quad \text{و} \quad y = R \sin \theta$$

۳ - سرعت زاویه‌ای $\omega = \dot{\varphi}(t)$

۴ - حامل سرعت مماس بردایره‌مسیر و اندازه آن است
 $v = R\omega$ یا $v = s' = R\theta'$

۵ - شتاب زاویه‌ای متحرک عبارتست از $\frac{d\omega}{dt}$ و

شتاب منتهجه عبارت خواهد بود از ω^2 - $\gamma = R \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}$

VIII - حرکت مستدیر هتشیله

۱ - معادله حرکت $s = R\omega t + s_0$

۲ - سرعت خطی آن $v = \frac{ds}{dt} = R\omega$

۳ - شتاب $\gamma = R\omega^2$

IX - تئوری دسنگاه مقایسه

۱ - تهر یک مقصود از تغییر دستگاه مقایسه حل این مسئله است :

۴۳ - مسئله - سه جسم صلب A و B و C مفروضند حرکت B نسبت به A و همچنین حرکت C نسبت به B معلوم است، حرکت C به A را تعیین کنید.

A را دستگاه ثابت و B را دستگاه نسبی مقایسه و حرکتش را نسبت به A کششی و حرکت C را نسبت به B حرکت نسبی و نسبت به A حرکت منتهجه مینامند.

۴۳ - قضیه - منتهجه سرعت حرکت هر نقطه در هر لحظه مجموع هندسی دو سرعت کششی و نسبی آن خواهد بود.

۴۴ - قضیه - هرگاه حرکت کششی انتقالی باشد شتاب منتهجه مساوی منتهجه شتابهای کششی و نسبی است.

۱- حرکت انتقالی

۴۵ - تعریف - جسم M نسبت به دستگاه ثابت A دارای حرکت انتقالی است هرگاه هر خط غیر مشخص از جسم M موازی خط ثابتی از دستگاه A باشد، لذا شرط لازم و کافی برای اینکه جسمی دارای حرکت انتقالی باشد اینست که همیشه دو خط متقاطع آن موازی دو خط ثابت از دستگاه مقایسه باشند.

۴۶ - قضیه - وقتی جسمی حرکت انتقالی کند (۱) مسیر تمام نقاطش قابل انطباقند (۲) در هر لحظه سرعت های جمیع نقاطش بردارهای همسنگند (۳) بردارهای شتاب در هر لحظه همسنگند.

۴۷ - تعاریف :

نسبت بینکدستگاه مقایسه ثابت بدانند آن جسم حول خط واصل بین آن دو نقطه دوران میکنند و آن خط را محور دوران گویند مسیر هریک از نقاط جسم ضمن دوران دایره ایست عمود بر محور دوران - حامل دوران محملش محور دوران و جهتش نسبت به جهت دوران نقاط ثابت و کمیتش مساوی اند از عددی سرعت زاویه ای یک نقطه جسم در لحظه معین است سرعت هریک نقطه از جسم ضمن دوران در هر لحظه مساوی عزم حامل دوران در آن لحظه نسبت بآن نقطه میباشد .

علم القوی (Dynamique)

تعاریف :

۴۸ - علم القوی یا دینامیک در حرکات و علل موجوده

آنها بحث میکند .

۴۹ - چون تعادل اجسام حالت خاصی از حرکات است

علم تعادل قوی یا استاتیک (Statique) حالت مخصوصی از دینامیک میباشد .

۵۰ - اصل چیر Principe de l'inertie (کیلر) - نقطه

مادی بتودی خود از سکون بحرکت یا از حرکت بسکون در نمیآید .

۵۱ - نتیجه - ۱) اگر نقطه مادی ساکن باشد و

عاملی بر آن اثر نکند همواره ساکن میماند .
 (۲) اگر نقطه مادی متحرک باشد و عاملی بر آن اثر نکند همواره متحرک بوده حرکتش مستقیم الخط متشابه است .
 (۳) تغییر وضع نقطه مادی از حرکت بسکون یا بالعکس در اثر عاملی است که قوه نامیده میشود .
 ۳۲ — اثر قوه بر نقطه مادی تولید شتاب در آن میبشد .
 ۳۳ — همواره بین قوه وارد بر نقطه مادی و شتاب نظیر آن نسبت ثابت $m = \frac{F}{a}$ برقرار است مقدار این نسبت ثابت m را جرم نقطه مفروض مینامند .

۳۴ — رابطه $m = \frac{F}{a}$ را رابطه اصلی مکانیک نام دارد .
 ۳۵ — جسمی که در خلاء رها شود بعد-ور قسائم بسمت زمین فرود میآید و حرکتش متشابه تغییر است . قوه ای که باعث این شتاب ثابت میشود وزن جسم است پس بین P و وزن جسم و m جرم آن و a شتاب ثقل این رابطه برقرار است :

$$P = mg$$

۳۶ — بین P و P' و وزنهای دو جسم و m و m' جرم-های آنها در هر نقطه از زمین این رابطه برقرار است :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

۳۷ — اصل استقلال آثار قوا (گالیله) — اثر چند

قوه که با هم بر یک نقطه مادی وارد شوند نظیر همان اثریست که مجموع هندسی آنها در آن نقطه تولید کند .

۴۸- اصل تساوی عمل و عکس العمل (نیوتن) هر عملی عکس‌العملی مساوی و درجهت مخالف با خود ایجاد میکند.

XIII- تعادل نقطه مادی

۳۹- نقطه مادی در حال تعادل است وقتی که تحت تأثیر هیچ قوه‌ای نباشد، یا قوایی که بر آن وارد میشوند شتابی در آن ایجاد نمایند. در این حال اگر نقطه سرعتی داشته باشد مطابق اصل کیلر حرکت آن همیشه مستقیم‌الخط متشابه است و تعادل چنین نقطه‌ای را تعادل دینامیکی مینامند؛ ولی هرگاه نقطه در لحظه معینی ساکن باشد همیشه ساکن خواهد بود و تعادلش تعادلی استاتیکی است.

۴۰- نقطه را آزاد گویند وقتی که بتواند در اثر قوای وارده در جهات مختلف حرکت کند در غیر اینصورت نقطه غیر آزاد است.

۴۱- نقطه غیر آزاد تحت تأثیر دو نوع قوه است :

۱- قوای مستقیم (مانند وزن نقطه)

۲- قوای وابسته که بوسیله موانع ایجاد میشوند.

XIV- استاتیك نقطه آزاد

۴۲- قضیه - شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه مادی

آزادی که تحت تأثیر چند قوه واقع شود اینست که نتیجه این

قوا صفر باشد. شرط فوق بطریق تحلیلی اینطور بیان میگردد :

اگر $(X_1 و X_2 و ... و X_n)$ و $(Y_1 و Y_2 و ... و Y_n)$

و (X_1 و X_2 و ... و X_n) تصاویر قوا و Y و Z تصاویر R منتجه آنها بر سه محور مختصات متعامد باشند شرط تعادل اینست که $\Sigma = 0$ یعنی :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

۴۴- رابطه استوین (Stevin) - برای اینکه نقطه

مادی در تحت تأثیر سه قوه بحال تعادل باشد لازم و کافی است که :

- ۱- هر سه قوه در يك صفحه باشند .
- ۲- هر کدام خارج زاویه دو قوه دیگر قرار گیرد .
- ۳- مقدار هر يك متناسب با جیب زاویه بین دو قوه دیگر باشد یعنی :

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha)} = \frac{F_2}{\sin(\beta)} = \frac{F_3}{\sin(\gamma)}$$

۴۷- لامینا قیك نقطه غیر آزاد

۴۴- هر گاه نقطه ای در تحت تأثیر قوای چندی که بر آیند

آنها $\Sigma = 0$ باشد بر يك سطح یا يك منحنی تغییر مکان دهد ممکن است : ۱) فقط بتوانند بر سطح یا منحنی تغییر مکان دهند و ای از آن نتوانند جدا شود ؛

(۲) بر سطح متكى باشد و يعنى بتواند از يکجهت از سطح جدا شود؛ در اينصورت اثر R فقط آنستکه نقطه را بر روى سطح نگاه میدارد.

۴۵ — فشار و عكسى اهمل — نقطه غیر آزاد M در تحت تاثير R برآيند قواى وارد بر آن، بر سطح يا منحنى عملى مساوى R بنام فشار وارد میآورد و سطح يا منحنى در مقابل بر نقطه M فشار متقابلى مانند R^2 موسوم به عكسى-اهمل وارد میسازد. عكسى اهمل قوه ایست وابسته به R^2 مساوى R و درجهت مخالف آنست.

۴۶ — اصطكاك — (۱) ممکنست سطح يا منحنى کاملاً صیقلی (بی اصطكاك) باشد. R^2 و R بر آن عمودند. (۲) و نیز ممکنست خشن (با اصطكاك باشند) و در اينصورت R^2 و R با آن زاویه ای میسازند، مقدار این زاویه بستگی يا درجه خشونت (اصطكاك) جسم دارد. 0 زاویه R^2 و R با سطح يا منحنى را زاویه اصطكاك و 90° را ضربه اصطكاك میگویند.

۴۷ — مخروطى که رأسش نقطه مادی واقع بر سطح و محورش عمود بر سطح و زاویه رأسش دو برابر زاویه اصطكاك باشد به مخروط اصطكاك معروف است.

۴۸ — قضیه شرط لازم و كافی برای اینکه نقطه مادی واقع بر سطح يا منحنى بی اصطكاك بحال تعادل باشد آنست که R ، منتهی قواى وارد بر سطح يا منحنى عمود بوده و نقطه را بر آن بچسباند.

۴۹- قضیه - شرط تعادل نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنی با اصطکاک آنست که زاویه بین R برآیند قوا و قائم بر نقطه از زاویه اصطکاک کوچکتر باشد یا عبارت دیگر نتیجه قوا داخل مخروط اصطکاک و یا منطبق بر سطح آن باشد .

۵۰- قوانین اصطکاک (Coulomb) :

- ۱- قوه اصطکاک حد با فشار قائم متناسب است .
- ۲- قوه اصطکاک بوسعت سطح اتکابستگی ندارد .
- ۳- قوه اصطکاک بجنس سطح و میران صیقلی بودن آن و ماده ای که سطح را بآن اندوده باشند بستگی دارد .

XV - دینامیک نقطه

- ۵۱- موضوع دینامیک تعیین روابط بین قوه و شتاب و سرعت و کار است .
- ۵۲- اثر قوه تولید شتاب است در متحرک . شتاب باعث تغییر سرعت است .

۵۳- دستورهای اصلی دینامیک - اگر X و Y و Z تصاویر قوه R بر سه محور و $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dz}{dt}$ تصاویر شتاب بر آنها باشند.

$\frac{md^2x}{dt^2} = X$ و $\frac{md^2y}{dt^2} = Y$ و $\frac{md^2z}{dt^2} = Z$; $m = \mu$; $R = F$

یکمک دستورهای اصلی دینامیک میتوانست این دو مسئله را حل کرد :

۲ $g z = \pm \sqrt{v_0^2} - v$ میباشند که یکی سرعت صعود و دیگری سرعت نزول است.

۶ - زمان صعود تا هر نقطه از مسیر مساوی زمان برگشت از آن نقطه به محل اولیه میباشد.

۵۵ - ثانیاً حرکت سهمی شکل

۱ - اگر جسمی بجرم m در مبدأ زمان $(t=0)$ از مبدأ O با سرعت اولیه v_0 در امتداد یک خط با افق زاویه α دارد در خلاف پرتاب شده باشد تنها قوه ای که بر آن وارد میشود وزن آن خواهد بود و مسیر حرکت منحنی مسطحی است که در صفحه قائم Ox قرار دارد.

۲ - قوانین حرکت

<p>تغییر در زمان</p> <p>تغییر در مکان</p>	<p>قائم</p> <p>افقی</p>	$g = \frac{dv_z}{dt}$	$g = \frac{dv_x}{dt}$
		$v_z = gt + v_0 \sin \alpha$	$v_x = v_0 \cos \alpha$
		$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$	$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$

۳ - معادله سهمی مسیر

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

$$z = \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

۴ - ارتفاع نقطه اوج و زمان رسیدن به آن

$$v_0^2 \sin^2 \alpha = 2g \quad \text{و} \quad \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

۵ - برد پامیدان حرکت: $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$

۶ - هدگراف (میداء) (خط

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} t \quad (\text{موازی } Oz)$$

۷ - دوفاصله $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$ حرکت محیطه، در آن لحظه

سرعت می نیم و مساوی $v_0 \cos \alpha$ و پس از آن حرکت منسره می باشد.

۸ - در هر نقطه بار ارتفاع $z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$

۹ - پارامتر سهمی $\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ و فاصله هادی از مبدأ

$$\frac{v_0^2}{2g} \text{ است}$$

۱۰ - معادله سهمی اطمینان:

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$$

XVIII - حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۵۶ - حرکت بی اصطکاک - نقطه M روی یک منحنی

میلای تحت تأثیر قوه R و عکس العمل R' تغییر مکان میدهد:

تصویر R بر قائم بر صفحه در امتداد R' است و بخشی میشود و فقط

تصویر R بر مماس بر سطح است که M را بحرکت در می آورد.

اگر تصویر R بر مماس را R_E بنامیم : بموجب رابطه

$$F = m\gamma$$

$$R_E = m \frac{dv^2}{dt^2}$$

این رابطه را معادله اصلی Intrinsèque حرکت میگویند .
 ۵۷- حرکت با اصطکاک - در این صورت عکس العمل
 R' با سطح زاویه ۰ (زاویه اصطکاک) میسازد و قوای مؤثر بر
 نقطه عبارتست از برآیند تصاویر R و R' بر مماس بر سطح .
 پس :

$$R_E + R'_E = m \frac{dv^2}{dt^2}$$

۵۸- مثال : حرکت نقطه بر سطح مورب - اگر
 زاویه سطح مورب را با افق α و سرعت اولیه حرکت را
 v_0 بنامیم :

(۱) بی اصطکاک : اگر $v_0 = 0$ باشد

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 ; v = g \sin \alpha t ; y = g \sin \alpha$$

هرگاه v_0 صفر نباشد

$$v = g \sin \alpha t + v_0 ; y = g \sin \alpha$$

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + v_0 t$$

هرگاه $v_0 < 0$ باشد (طرف بالا منقبض می شود) حرکت نازمان

$$t = \frac{v_0}{g \sin \alpha} \quad \text{مبدلته (دوبالا) و از آن پس مسرعه (رو}$$

حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۳۰۵

بیانین) خواهد بود .

۲ - با اصل کالت

زاویه اصل کالت را ضمن حرکت θ فرض میکنیم نقطه

MI تحت تأثیر وزن خود (mg) و عکس العمل $R^?$ می باشد ؛

۱) حرکت بعطف پائین : $v_0 = 0$ - قوانین حرکت عبارتند از :

$$v = \frac{g \sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t \quad v_0 = 0$$

$$s = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t^2 \quad v_0 = 0$$

موقعی که $\theta = 0$ می باشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 \neq 0$ باشد تا زمان $\frac{v_0 \cos \theta}{g \sin(\theta - \alpha)}$

حرکت مستقیم می باشد و از این بعد متحرک در فاصله

$$s = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{2g \sin(\theta - \alpha)}$$

موقعی که $\theta = 0$ می باشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 \neq 0$ باشد حرکت متشابه می شود .

موقعی که $\theta = 0$ باشد حرکت متشابه التپییر مسرعه است .

۲) حرکت بعطف بالا : $v_0 \neq 0$ - قوانین حرکت عبارتند از :

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{\cos 0} = g \sin \alpha \quad \text{و} \quad v_0 = \frac{g \sin \alpha}{\cos 0} \quad \text{و} \quad \frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}{\cos 0} = \frac{g \sin \alpha}{\cos 0}$$

تا زمان $\frac{v_0 \cos 0}{g \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}$ حرکت عمودی و محیطه در این زمان متحرک بهاصله $\frac{v_0^2 \cos 0}{2g \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)}$ قرار داشته و از این بعد حرکت وضع حالت اول (شماره ۹-۱) را بخود میگیرد
XIX = گار

۵۰ - اگر نقطه مادی M در اثر نیروی I^r و در امتداد F تغییر مکانی مساوی $IDID'$ دهد کاری مساوی $(I^r)(IDID')$ انجام شده است.
۶۰ - هرگاه α زاویه بین حامل I^r و امتداد $IDID'$ باشد کار عبارت خواهد بود از: $(IDID') \cos \alpha = F \cdot IDID'$
این کار مثبت است هرگاه $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ یا

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4} \quad \text{باشد و آنرا کار متحرک نامند و منهای است وقتی که} \quad \frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4} \quad \text{باشد و آنرا کار مقاوم نامند؛ اگر} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2} \quad \text{باشد کار صفر است.}$$

۷۰ - قوه حیات (Vital force)

۷۱ - تهریش - فرس و یو یا قوه حیات یک نقطه مادی بجزم

m که با سرعت v حرکت کند عبارتست از mv^2
 ۶۲ - نصف فرس ویو (mv^2 —) را انرژی حرکتی
 (mécritique cinétique) نقطه گویند.

۶۳ - قضیه - تغییرات انرژی حرکتی یک نقطه مادی
 متحرک بین دو نقطه a و b مساویست با حاصل جمع کارهای
 قوای وارد بر نقطه بین این دو لحظه.

XXXI - لا محاله قوای بیرون جسم صلب

۶۴ - قوای وارد بر جسم صلب عبارتند از: ۱) قوای
 خارجی ۲) قوای درونی.

۱) قوای خارجی از نقاط مادی خارج از جسم ناشی
 میشوند و خود بدو قسمت میشوند: ۱) قوای مستقیم ۲) قوای
 ارتباطی خارجی.

۲) قوای درونی از اعمال متقابل نقاط خود جسم ناشی
 میگردند و عبارتند از عکس العمل های ملکولی و قوای
 ارتباطی داخلی.

۶۵ - جسم صلب را در حال تعادل استاتیکی گویند
 وقتی که اگر آنرا بدون سرعت اولیه بحال خود گذارند در اثر
 قوای وارد بر آن نسبت بدستگاه مقایسه بیحرکت بماند.

۶۶ - شرط لازم برای اینکه جسمی در حال تعادل باشد
 آنست که $\sum (D_i) = 0$ مجموع هندسی قوای خارجی وارد بر آن
 و $\sum (D_i) = 0$ منتهی عزم این قوا صفر باشد یعنی: $\sum (D_i) = 0$ و
 $\sum (D_i) = 0$

۶۷- تعادل دستگاهها - دو دستگاه قوا متعادلند وقتی که اثر آنها در یک جسم یکسان باشد .

۶۸- قضیه - شرط لازم برای تعادل دو دستگاه قوا آنست که مجموع هندسی آنها با هم و منتهی‌عزمشان نسبت به نقطه غیر مشخصی با هم مساوی باشند یعنی $(OR^4) = (OR^4)$ و $(OR^4) = (OR^4)$ است . این شرایط برای اجسامی که تغییر شکل نمیدهند لازم و کافی است .

XXII - اعمال مقدماتی

همیشه میتوان بوسیله اعمالی بنام اعمال مقدماتی دستگاه قوای بدستگاهی دیگر معادل یا آن تبدیل نمود . این اعمال عبارتند از :

- ۱- لغزاندن قوه بر محصل آن .
- ۲- تبدیل چند قوه متقارب به مجموع هندسی آنها و بعکس تجزیه یک قوه به مؤلفه‌های خود .
- ۳- اضافه یا کسر نمودن دو قوه متقابل .

۶۹- بوسیله اعمال مقدماتی دستگاه قوای وارد بر جسم را بدستگاهی معادل یا آن که مؤلفات کمتری داشته باشد تبدیل میکنند و از این راه حالت و وضع حرکت جسم را تعیین مینمایند .

۷۰- مشخصات مرکز قوای موازی - اگر به چند نقطه مادی A_1 و A_2 و \dots و A_n از یک جسم بشرط قوای موازی

یکدیگر با مقادیر جبری I_1 و I_2 و ... و I_n وارد شوند و مختصات نقاط مذکور نسبت به سه محور متعامد (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) و ... و (x_n, y_n, z_n) و مختصات مرکز این قوا x و y و z باشند :

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_n x_n}{\sum F_n}$$

$$y = \dots = \frac{\sum y_n F_n}{\sum F_n} \quad \text{و}$$

$$z = \dots = \frac{\sum z_n F_n}{\sum F_n}$$

وقتی قوای مرکز بود باید یکدیگر مساوی باشند مختصات مرکز آنها چنین میشود :

$$x = \frac{\sum x_n}{n} \quad \text{و} \quad y = \frac{\sum y_n}{n} \quad \text{و} \quad z = \frac{\sum z_n}{n}$$

۷۱ - قضیه - همیشه ممکن است قوای وارد بر جسمی را به سه قوه که نقاط اثرشان سه نقطه دلخواه واقع بر یک استقامت باشند تبدیل نمود .

۷۲ - قضیه - ممکن است قوای وارد بر جسمی را به سه قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری معینی وارد شود تبدیل نمود .

III - مرکز ثقل

۷۳ - تعریف - اوزان نقاط مادی یک جسم قوای

متوازی قائمی هستند که مرکز آنها مرکز ثقل جسم (ن) است و
منتجه آنها بردار است قائم که بر نقطه G میگذرد.

۷۴ - مختصات مرکز ثقل m_1 و m_2 و m_3 و ... و m_n بترتیب جرمهای نقاط مادی A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n جسمی باشند و هر یک از نقاط فقط تحت تأثیر قوای حاصل از ورنه خود قرار گیرند مختصات مرکز ثقل ثقل جسم مزبور نسبت به محور مشامد عبارتند از :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

۷۵ - اجسامی که شکل آنها ثابت است اگر هم محلشان تغییر کند یا از وضع اولیه منحرف شوند مرکز ثقلشان تغییر نمیکند.

۷۶ - جسمی را متشابه الاجزاء گویند اگر هر دو جزء متساوی العجم از آن متساوی العجم باشند.

۷۷ - قضیه - شکلی که دارای مرکز یا محور یا (سطح تقارن است مرکز ثقلش بر این مرکز یا محور یا سطح تقارن قرار دارد.

۷۸ - یک شکل مستوی (یا یک جسم) دارای یک قطری یا یک صفحه قطری) وابسته یا متبادله است وقتی که هیچ نقطه

مرکز ثقل

۳۱۹

آن شکل مستوی (یا جسم) را بتوان بدودسته چنان تقسیم نمود که خط واصل بین هر نقطه یکدسته و نقطه دیگری از دسته دیگر موازی امتداد Δ بوده و مساحتش بر آن قطر (یا صفحه قطری) واقع گردد.

۷۹- قضیه- شکلی که دارای قطر یا صفحه قطری نظیر امتداد معینی باشد (۷۸) مرکز ثقلش بر این قطر یا صفحه قطری قرار دارد.

۸۰- مرکز ثقل قطعه خط مستقیم به نقطه وسط آن است.

۸۱- مرکز ثقل محدب مثلث به مرکز دایره محاطی مثلثی است که از وصل مواضع میانه‌های آن بدست می‌آید.

۸۲- مرکز ثقل سطح مثلث به نقطه تلاقی سه بی‌نه آن است.

۸۳- مرکز ثقل چهارضلعی به نقطه تلاقی دو خط واصل بین مراکز ثقل چهار مثلثی است که بترتیب از دو ضلع متقاطع چهارضلعی و یک قطر تشکیل میشود.

۸۴- مرکز ثقل قوس ناقص \widehat{AB} و دایره $\odot O$ مرکز ثقل I بر من اینک AI و IO مواضع عمودهای مرسوم از I بر دو قاعده باشند از این دایره بدست می‌آید:

$$AI = \frac{2}{3} IO \quad \text{و} \quad IO = \frac{1}{3} AI$$

۸۵- مرکز ثقل متوازی الاضلاع به محل تلاقی دو قطر آنست.

۸۶ — مرکز ثقل کثیرالاضلاع منتظم — مرکز آن است .

۸۷ — مرکز ثقل دایره — مرکز دایره است .

۸۸ — مرکز ثقل منگسور منتظم بطول ۱ و شعاع دایره محیطی R و وتر منتهی C از این رابطه بدست میآید:

$$OG = \frac{R \cdot C}{1}$$

۸۹ — مرکز ثقل قوسی دایره مقابل وتر AB از دایره ای مرکز O و شعاع R از این رابطه بدست میآید :

$$GO = \frac{R \cdot AB}{\text{قوس } AB}$$

۹۰ — مرکز ثقل بیضی — محل تلاقی دو قطر آنست .

۹۱ — مرکز ثقل قطاع دایره شعاع R و مرکز O

منطبق بر مرکز ثقل قوسی از دایره به شعاع R میآید و بهمان مرکز O میباشد اگر به نصف زاویه مرکزی قطاع باشد :

$$OG = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\alpha} - \frac{2}{3}$$

۹۲ — مرکز ثقل سطح نیمدایره بر روی شعاع عمود

بر قطر و بقاصده $OG = \frac{4R}{3\pi}$ از مرکز دایره قرار دارد .

۹۳ — مرکز ثقل متوازی السطوح نقطه تلاقی دو قطر آنست .

۹۴- مرکز ثقل هرم و مخروط بر مرکز ثقل مقطع صفحه‌ای در آن که بفاصله ۱ از ارتفاع از قاعده بموازات قاعده رسم شده باشد واقع است .

۹۵- مرکز ثقل هرم مثلث القاعده - روی خط واصل بین رأس و مرکز ثقل قاعده‌اش و بفاصله ۳ از رأس قرار دارد .

۹۶- مرکز ثقل منشور و استوانه - محل تقاطع خط واصل بین مراکز دو قاعده با مقطع متوسطش میباشد .

۹۷- مرکز ثقل منشور مثلث القاعده - بر وسط خط واصل بین مراکز ثقل دو قاعده‌اش قرار دارد .

۹۸- مرکز ثقل کره بر مرکز آن منطبق است .

۹۹- قضیه گولدن (Guldin) - (۱) سطح حاصل از دوران یک خط مستقیم را از یک سطح معینی حول یک خط از همان سطح که را را قطع نکند مساویست با طول را ضرب در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل را .

(۲) حجم حاصل از دوران سطح را حول خطی از همان سطح مساویست با حاصل ضرب را در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل را .

XXIV- شرط تعادل جسم صلب آزاد

۱۰۰- قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه آزادی صلب تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که مجموع

هندسی قوای مزبور صفر و منتهجه عرضهای آنها نسبت بهر نقطه صفر باشد.

۱۰۱ — بیان شرط تعادل و مدار بقی تعالیایی — اگر منتهجه تعساویر قوای وارده بر جسم روی سه محور متعامد بترتیب X و Y و Z و تعساویر منتهجه عزم آنها بر سه محور A و M و N فرض شوند موقعی جسم بحال تعادل است که :

$$OR = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right. \quad \text{OR} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{array} \right.$$

XXXV — شرط تعادل جسم حالب قیو آزاد

۱۰۲ — شرط لازم و کافی برای آنکه جسم حالب غیر آزاد تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که منتهجه قوای مستقیم و عکس العملهای جسم از یک طرف و عزم آنها نسبت بنقطه تابی از طرف دیگر مساوی صفر باشد.

۱۰۳ — قضیه — شرط لازم و کافی برای آنکه جسمی که حول محوری ثابت بدون اصطکاک دوران مینماید در تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که عزم قوای وارده نسبت باین محور صفر باشد.

۱۰۴ — قضیه — شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی که حول نقطه ثابت در آن بدون اصطکاک داردا اینست که منتهجه عزم قوای وارده نسبت باین نقطه صفر باشد.

۱۰۵ — قضیه — شرایط لازم و کافی برای تعادل جسمی که در حین دوران حول محوری بر روی آن بلغزد اینست که

مجموع تعساویر قوای وارده بر این محور و همچنین عزمهای قوا نسبت به آن صفر باشد .

۱۰۶- **کثیر الاضلاع انکاء** - از وصل نقاط انکاء يك جسم بر يك سطح کثیر الاضلاع بدست میآید موسوم به کثیر الاضلاع انکاء .

۱۰۷- **قضیه** - شرط لازم و کافی برای تعادل جسم متکی بر سطح صیقلی آنست که منتهجه قوای وارده قائم بر سطح بوده و جسم را بر سطح متکی نماید و ضمناً داخل کثیر الاضلاع انکا باشد .

XXVI - ماشینهای ساده

۱۰۸- **تعریف** - ماشینهای ساده دستگاههایی هستند که هر نقطه از آنها بر منحنی مشخص و ثابتی حرکت میکنند و چون ارتباطات کاملی بین اجزاء مختلفه آنها هست یا مشخص بودن و ضم يك نقطه بر مسیرش میتواند اوضاع سایر نقاط دستگاه را معلوم ساخت .

۱۰۹- ماشینهای ساده واسطه بین دو نوع قوه میباشند یکی قدرت (قوای محرک) و دیگری مقاومت . دستگاه و قشی بحال تعادل است که قدرت و مقاومت دستگاهی تعادل تشکیل دهند .

اهرمها

۱۱۰- **تعریف** - اهرم جسمی است که حول نقطه ثابتی موسوم بنقطه انکاء میتواند حرکت کند . طول عمودها نیکه از نقطه انکاء بر امتداد قدرت با مقاومت وارد شوند بازوی

قدرت یا مقاومت نام دارند .

۱۱۱ — شرط تعادل اهرم آنست که عزم قوای وارد بر آن نسبت بنقطه اتکاء صفر باشد . یعنی $P_1 \times R_1 = P_2 \times R_2$ (۱) قدرت و R مقاومت و W و W_1 طولهای بازوی قدرت و مقاومتند) یا عبارت دیگر قدرت و مقاومت دارای نتیجه ای باشند که از نقطه اتکاء بگذرد .

۱۱۲ — فشار بر نقطه اتکاء نتیجه دو قوه قدرت و مقاومت است یعنی :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\theta)}$$

پس فشار وقتی ماکزیمم است که قوه قدرت و مقاومت موازی باشند . در اینموقع فشار مذکور $P + Q$ خواهد بود .

۱۱۳ — انواع اهرم — اهرم بر سه نوع است :

۱ — اهرم نوع اول که در آن نقطه اتکاء بین قدرت و مقاومت واقع است . مانند ترازو و قیچی .

۲ — اهرم نوع دوم که در آن مقاومت بین قدرت و نقطه اتکاء است . مانند پلک چرخه (چرخ رفتگران) و تلمبه .

۳ — اهرم نوع سوم که در آن قدرت بین مقاومت و نقطه اتکاء قرار دارد . مانند چرخ چاقو نیز گنی .

چرخ چاقو

۱۱۴ — تعریف — چرخ چاقو از استوانه دواری تشکیل شده است موسوم به تنه چرخ و در طرفین آن دو استوانه کوچکتر که محورشان بر محور تنه چرخ منطبق است و بر پایه تکیه

قرار دارند .

۱۱۵ — شرایط تعادل چرخ چاه آنست که اولاً قوای محرک و مقاوم چرخ را در دو جهت مخالف حرکت دهند ثانیاً مقدار آنها متناسب با نسبت عکس شعاع چرخ (یا طول دسته) و شعاع تنه باشد یعنی :

$$\frac{r}{R} = \frac{P}{Q} \quad (P \text{ و } Q) \text{ قوای محرک و مقاوم و } R \text{ و } r$$

اشعه چرخ و تنه میباشد

۱۱۶ — انواع چرخ چاه - چرخ چاه بر دو نوع است :

- ۱ - چرخ چاه معمولی که محور آن افقی است و چرخ محرك تبدیل بدسته خمیده ای شده که متصل با ستوانه میشود .
 - ۲ — چرخ چاه معدنی که چرخ محرك آن بزرگ و بشعاع تقریباً ۳۵ متر است و در کنار این چرخ تردهائی است که اگر شخصی روی آنها حرکت کند وزن او چرخ را بحرکت در می آورد و چرخ دوران میکند .
- گریلت یا چلث (Chute)

۱۱۷ - تعریف - اسبابی است که برای بلند کردن بار های سنگینی بارتفاع کم بکار میرود و آن عبارتست از يك محور قائم دندانه دار که بوسیله چرخ دندانه داری که حول محور افقی میگردد بالا و پائین میرود .

۱۱۸ — شرایط تعادل چلث : $\frac{r}{R} = \frac{P}{Q} \quad (P \text{ و } Q)$

قدرت و مقاومت و R و r طول دسته آگرداننده و شعاع چرخ
دندانه دار است)
قرقره

۱۱۹ - تهریقه - استوانه ایست فلزی یا چوبی که حول
محور خود میتواند دوراچرخد. بظرفین محور دوشاخه‌ای
متصل است که اگر آنرا بوسیله قلابی بنقطه ثابتی بیاوریند قرقره
را ثابت والا متحرک نامند.

۱۲۰ - شرط تعادل قرقره ثابت - شرط لازم
و کافی برای تعادل آنست که مجموع عزم قوای (I) و (J) نسبت
بمحور قرقره صفر باشد (از اصطکاک صرف نظر میشود).

۱۲۱ - قرقره متحرک - در این نوع قرقره باری را
که باید بلند نمایند بقلاب دوشاخه قرقره آویزان نموده و یک
سر طنابی را که از روی قرقره و داخل دوشاخه میگذرد بنقطه
ثابتی وصل نموده و قدرت را بگردی طناب وارد میآورند.
۱۲۲ - شرط تعادل در قرقره متحرک آنست که عزم قوای
وارد شده نسبت به نقطه O (مرکز دایره قرقره) صفر باشد.

۱۲۳ - از اجتماع چند قرقره موفل (Moufle) تشکیل
میشود. و اجتماع دو موفل هم نوع را پالان (Palan) مینامند.
اگر I قدرت و R مقاومت و n عده قرقره ها فرض شود

شرط تعادل پالان اینست که :

$$I = \frac{R}{2n}$$

آحاد مهم علمی که در ریاضیات متداول است

واحد	دستگاه CGS	دستگاه MKS	توضیحات
آحاد اصلی			دستگاه MKS با دستگاه متری آحاد اصلی
طول	میتسر	متر	عبارت از: متر (طول)، ثانیه (زمان) و
جرم	گرم	کیلوگرم (فوه)	
زمان	ثانیه	ثانیه	رایج = فرسی از یاره عسوی طول شعاع آن
آحاد مشتق			دین = قوه ای که یک جرم یک شتاب یکسان میدهد
سطح	سانتیمتر مربع	متر مربع	در ثانیه یکبار
جرم	«مکعب»	«مکعب»	ارگ = کار یک دین در یک سانتیمتر
زاویه	رادیان	رادیان	ژول = (۱۰۷) ارگ
فوه	Dyne	Sthene	وات = ژول در ثانیه
کلویبرو	Erg	کیلوزول	پیر = ۱۰۷ باری
قدرت	ارگ در ثانیه	وات	باری = دین بر سانتیمتر
فشار	Bat	Pieze	کاری کوچک = مقدار حرارتی که یک گرم آب را یک درجه گرمتر کند.
مقدار حرارت کاری کوچک		Thermie	کاری بزرگ = ۱۰۰۰ کاری کوچک
			ترمی = ۱۰۰۰ کاری بزرگ

هیت

۱- کلیات

- ۱- کره سماوی یا قلمک کره موهومی است که مرکزش يك نقطه اختیاری از زمین و شعاعش نامحدود است و کواکب در سطح داخل آن قرار گرفته اند .
- ۲- خط قائم هر نقطه عبارت از امتداد قوه ثقل در آن نقطه است که موازی امتداد شاغول میباشد (محور بدن هر شخص در روی زمین امتداد قائم را نشان میدهد) .
- ۳- سمت الرأس و سمت القدم نقاط تلاقی خط قائم هر نقطه اند یا کره سماوی ، آنکه در بالاست سمت رأس و دیگری سمت قدم میباشد .
- ۴- سطح قائم هر نقطه هر سطحی است که بر خط قائم بگذرد .
- ۵- محور عالم خط موهومی است که کره سماوی بدور آن میگردد .
- ۶- قوسین عالم دو نقطه برخورد محور عالم با کره سماوی هستند . آنکه در نیمکره شمالی است قطب شمال و دیگری قطب جنوب است (قطب شمال در حدود صورت فلکی بنام خرس کوچک (دب اصغر) و مجاورت ستاره جدی و قطب جنوب در حوالی صورت فلکی بنام جدیب جنوبی واقعند) .

۷ — نصف النهار هر نقطه سطح قائمی است که بر محور عالم میگذرد .

۸ — سطح افق هر نقطه سطحی است که از آن نقطه بر خط قائم همان نقطه عمود شود .

۹ — استوائی فلکی یا مهوری النهار دایره عظیمه‌ای از کره سماویست که عمود بر محور عالم است .

۱۰ — مدارات دوایر کوچکی از کرة فلکی موازی معدل النهار میباشند .

۱۱ — دایره ساعتی یا نصف النهار هر کوب دایره ایست که بر این کوب و محور عالم میگذرد .

۱۲ — زاویه ساعتی هر کوب در هر لحظه قوسی است از معدل النهار محصور بین دایره ساعتی آن کوب و نصف النهار مکان .

۱۳ — حرکت یومی — هر کوب در ۲۴ ساعت یکبار حول محور عالم میگردد . چون کواکب ظاهرا بر سطح کرة سماوی قرار دارند بنظر میرسد که کرة سماوی در ۲۴ ساعت یکبار حول محور خود از مشرق به غرب دورانی میکند .

این حرکت ظاهری را حرکت یومی میگویند . مسیر هر کوب بر یکی از مدارات است .

۱۴ — دایرة البروج یا دایرة خسوفه و کموفه دایره عظیمه ایست که زمین در آن یکسال حول خود بچرخد .

همچنین این سطح آن با معدل النهار زاویه ۲۷° ۲۳' تشکیل میدهد .

۱۵ — نقاط اعتدال عبارتند از دو نقطه تلاقی دایرة البروج بامعدل النهار . آنرا که زمین در موقع رفتن از نیمکره جنوبی بشیمکره شمالی از آن میگذرد نقطه اعتدال بهاری (ربیعی) میگویند و γ نام میگذارند ، دیگری را که زمین در موقع رفتن از نیمکره شمالی به نیمکره جنوبی از آن میگذرد نقطه اعتدال پائیزی (خریفی) و γ' مینامند .

۱۶ — نقاط انقلاب دو نقطه از دایرة البروجند که هر يك بفاصله 90° درجه از نقاط اعتدال قرار دارند . آنکه در نیمکره شمالی است بنقطه انقلاب تا بستانی یا صیفی و دیگری که در نیمکره جنوبی است بنقطه انقلاب زمستانی یا شتوی موسوم است .

۱۷ — جهت مستقیم و جهت معکوس — اگر شخصی بر محور عالم قرار گیرد و سر او متوجه شمال باشد هر حرکت که از طرف راست بچپ او انجام گیرد در جهت مستقیم است و در جهت دیگر ، یعنی از چپ بر راست ، در جهت معکوس .

۱۸ — قطر ظاهری هر کوکب بشعاع R که بفاصله 1 از ناظر واقع باشد زاویه α حادث بین اشعه بصری محدود دایره انتهای قطر کوکب میباشد .

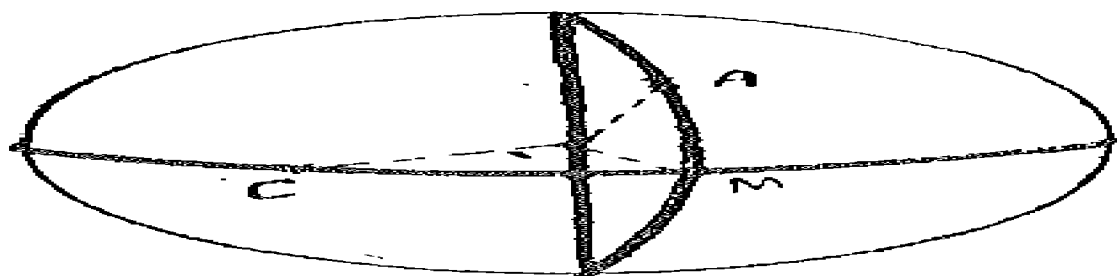
$$\sin \alpha = \frac{R}{1}$$

و چون قطر ظاهری بسیار کوچک است و چپ زاویه یا خود آن مساویست :

$$\alpha \approx \frac{R}{1}$$

۱۱ - مختصات کروی

۱۹ - برای مشخص ساختن وضع يك نقطه A بر روی کره سماوی از مختصات کروی استفاده میشود .
در هر دستگاه مختصات کروی دایره عظیمه‌ای بنام صفحه اصلی در نظر گرفته میشود و در روی آن نقطه A را بنام مبدأ اختیار مینمایند . T نگاه بر نقطه مفروض A و محور



عمود بر صفحه اصلی دایره عظیمه دیگری میگذرانند تا دایره اصلی را در M قطع کند . دو قوس CM و AM مختصات نقطه A هستند که اولی از ۰ تا ۳۶۰ در جهت مستقیم یا معکوس و دومی از ۰ تا ۹۰ در جهت مثبت یا منفی اندازه گرفته میشوند (ش. ۱)

۲۰ - دستگاه مختصات افقی (مختصات سمتیه) :
سمت و ارتفاع -- صفحه اصلی صفحه افق و نقطه اصلی محل تلاقی افق با سطح قائم تابی بنام سطح قائم اصلی میباشد .
مختص اول را سمت و مختص دوم را ارتفاع میگویند . سمت در جهت معکوس اندازه گرفته میشود .

گاهی بجای ارتفاع متمم آن که نام سمت یا فاصله آراسی نام دارد داده میشود . مختصات افقی بستگی بزمان و مکان نرصد دارند . حد اعلاى ارتفاع را اوج مینامند .

۲۱ — ارتفاع قطب مدار ارتفاع قطب از افق هر محل از روی دستور (۱۰۰ - ۹۰) بدست میآید (۲ و ۳) فواصل سمتی کواکب ابدی الخلیفوری در مواقع عبور علیا و سفلی از نصف النهار محل و ۱۱ ارتفاع قطب است.

۲۲ — دستگاه مختصات استوائی (مختصات معدلی) : بهد و میل — سطح اصلی استوائی فلاتکی و نقطه اصلی نقطه اعتدال بهاری و جهت مستقیم (مخالفت حرکت عقربه‌های ساعت) — مختص اول را بهد و دوم را میل میگویند. متمام میل فاصله قطبی نام دارد. مختصات معدلی بستگی با مکان ترصد ندارند.

۲۳ — اندازه بهد — فاصله زمانی بین عبور کواکب از نصف النهار محل و نصف النهار مار بر نقطه اصلی را بوسیله ساعت نجومی بدست آورده و بقرار هر ۱۵ درجه در یک ساعت بعد کواکب را حساب می‌نمایند.

۲۴ — اندازه میل — اندازه جبری میل هر کواکب از روی دستور کلی : $90 - \alpha - \delta$ (با در نظر گرفتن جهت) بدست میآید (۱۱ میل و ۱۱ ارتفاع قطب و ۱۱ فاصله الراس کواکب در موقع عبورشان بنصف النهار میباشد).

۲۵ — تعیین فاصله قطبی کواکب در مکانی بهر شی (شماره ۳۲):

در نیمکره شمالی

۱ — برای کواکب ابدی الخلیفوری (حول قطبی)

- ۲- کواکب رقیبت شوند (دارای طلوع و غروب): $2. \dots P \dots 180 \dots 2.$
 ۳- « ابدی الخفاء
 در نیمه‌تکره جنوبی

- ۱- برای کواکب ابدی الخفاء (حول قطبی): $P \dots 2.$
 ۲- « رقیبت شوند (دارای طلوع و غروب): $2. \dots P \dots 180 \dots 1. \dots P \dots 2.$
 ۳- « ابدی الخفاء:
 (فاصله قطبی کواکب در نیمه‌تکره شمالی از قطب شمال و در نیمه‌تکره جنوبی از قطب جنوب است و در نیمه‌تکره جنوبی منفی است)

- ۲۶- دستگاه مختصات هندسی: طول و عرض - صفحه اصلی: دایره البروج و نقطه اصلی نقطه اعتدال ربیعی - جهت مستقیم: نخستین اول: طول، نخستین دوم: عرض.

III - در هیئت

- ۲۷- شکل زمین - زمین به شکل کره ایست که در قطب‌هایش کمی فرورفته باشد، نظیر حجمی که از دوران یک نیمه بیضی حول محور انحرافش تولید شود. سطح آن تا صاف و اطرافش راهروائی بقطر تقریباً ۴ کیلومتر احاطه نموده است.
- ۲۸- دوران زمین - زمین با حرکت متشابه حول محور موهومی که از مرکز ثقلش می‌گذرد دوران می‌کند این محور بر محور عالم منطبق است.
- ۲۹- خط و سطح قائم و سطح نصف النهار و افق (شماره های ۲ و ۴ و ۷ و ۸ مراجعه شود).

۳۰ — خط نصف النهار — فصل مشترك سطح نصف النهار هر محل با سطح افق همان مكان را خط نصف النهار آن محل گویند. این خط تصویر محور عالم بر سطح افق محل است.

۳۱ — طول يك نقطه از سطح زمین — زاویه بین نصف النهار محل و نصف النهار نقطه‌ای که مبدأ عرض شده میباشند (نصف النهار گرینویچ یا پاریس را اغلب مبدأ طولها میگیرند) اندازه آن از صفر تا ۱۸۰ درجه شرقی یا غربی تغییر میکنند (بر حسب فاصله زمانی بازاء هر ساعت ۱۵ درجه محاسبه میشود) .

۳۲ — عرض يك نقطه از سطح زمین — زاویه بین قائم مكان (امتداد شعاع زمین در آن نقطه) با سطح استوا است و همچنین مساویست با ارتفاع قطب از افق آن محل (شماره ۲۱)

۳۳ — مدارات — مدارات زمین مكان هندسی نقاطی از زمین میباشند که دارای يك عرض باشند.

۳۴ — استوای زمین — مداری است بعرض صفر .
۳۵ — قطبین زمین — دو نقطه از زمین بعرض ۹۰° میباشند .

۳۶ — شعاع r افق حسی — اگر R شعاع زمین و h ارتفاع شخص ناظر از سطح زمین باشد مقدار r شعاع افق حسی از روی دستور $\sqrt{2Rh}$ بدست میآید .

۳۷ — انحنای افق — زاویه‌ای را که رأسش نقطه‌ای از قضا

(چشم ناظر که مقداری بالاتر از سطح زمین قرار گرفته باشد)
و دو ضلعش یکی مماس بر کره زمین و دیگری خط افقی باشد
زاویه انحنای افق گویند .

۳۸ — طول شعاع زمین از روی زاویه انحنای افق —
اگر R شعاع زمین و h ارتفاع ناظر و α زاویه انحنای افق

$$R = \frac{h \cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

باشد :

(بازا : متر = ۳۰۰ h و α = ۳۳ کیلومتر = ۷۰۰۰ R میشود)

۳۹ — ابعاد زمین = ربع محیط نصف النهار زمین
مساوی است با : ۱۸۶۸۱۰۰۰ متر .

محیط استوائی زمین مساوی است با : ۷۵۷۲۱۰۰۰ متر .

سطح کره زمین : ۱۰۴ × ۵۱۰۰۶۵ کیلومتر مربع

حجم کره زمین : ۱۰۶ × ۱۰۸۳۲۰۵ کیلومتر مکعب .

شعاع کره ای که نصف النهارش مساوی نصف النهار زمین
باشد = ۶۳۶۷۳۸۷ متر است .

شعاع کره ای که سطحش مساوی سطح زمین باشد =
۶۳۷۱۰۰۴ متر است .

شعاع کره ای که حجمش مساوی حجم زمین باشد =
۶۳۷۰۹۹۶ متر است .

شعاع استوائی زمین مساویست با : ۶۳۷۸۲۴۹ متر

قطبی « « « : ۶۳۵۶۵۱۵ متر

فرورفتگی قطبی ۲۳٫۹۵' است
a — b
a است

۴۰ — اندازه شتاب ثقل زمین — در نقطه‌ای از زمین
عرض 45° و هم سطح با دریا مساویست با 980.665 (در
دستگاه ب. ب. ب.)

۴۱ — وزن مخصوص زمین — در داخل زمین وزن
مخصوص 5.0 و نسبت با عصار واقع در سطح زمین 5.0 است —
۴۲ — سرعت حرکت انتقالی زمین در هر ثانیه 49
کیلومتر است.

۴۳ — مدت حرکت انتقالی زمین بدور شمس 365
روز و 5 دقیقه و 49 و 48 ثانیه است.

۴۴ — مختصات جغرافیائی تهران — طول تهران از
نصف النهار یاریس 7° و 5° و 49° و عرض تهران 7° و 1° و 35°
میباشد.

۱۷ — نقشه‌های جغرافیائی

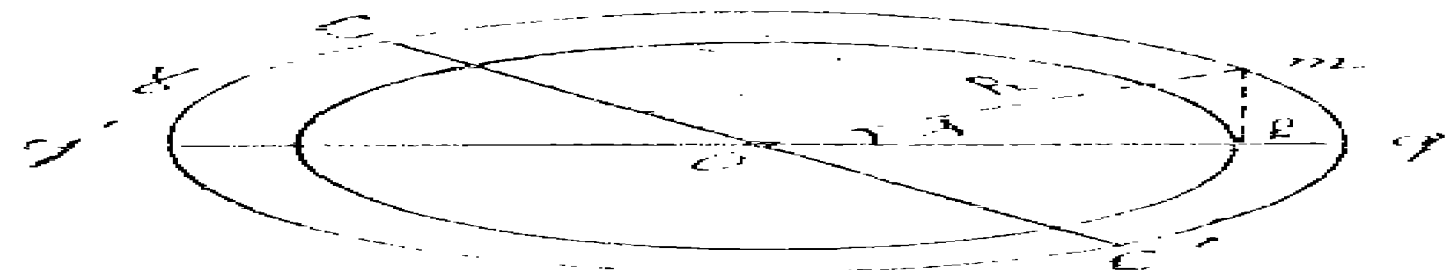
۴۵ — تعریف — نقشه‌های جغرافی عبارتند از صفحاتی
که تمام یا قطعه‌ای از سطح زمین را با قاعده مخصوص و قیاس
معین بر روی آن تصویر نموده یا گسترده باشند.
برای ترسیم نقشه قیلاشیکه‌ای از نصف النهارات و مدارات
زمین را تهیه نموده و بعد محل هر نقطه را از روی طول و
عرضش بر روی آن معین نمایند.

۴۶ — تصویر قائم هر نقطه — بر یک صفحه موقع عمودی
است که از آن نقطه بر صفحه وارد شود. این صفحه را صفحه
تصویر نامند.

۴۷ - رسم نقشه بطریق تصویر قائم :

۱ - سطح تصویر در سطح استوار میباشند : تصویر بر قطب بر مرکز استوار قرار دارد ، تصویر هر مدار عرض λ دایره‌ایست متعدها سرکز با استوار و شعاع $r = R \cos \lambda$ ، تصویر هر نصف النهار بطول l قطری از استوار است که با تصویر نصف النهار مبدأ زاویه l تشکیل دهد .

طریقه رسم (۱) برای رسم مداری عرض λ از نقطه m انتهای شعاع mm که با mm زاویه λ دارد عمود ml را بر mm وارد می‌کنیم ، دایره‌ای بر مرکز O و شعاع Ol تصویر مدار مغروشن است (ش ۲) .



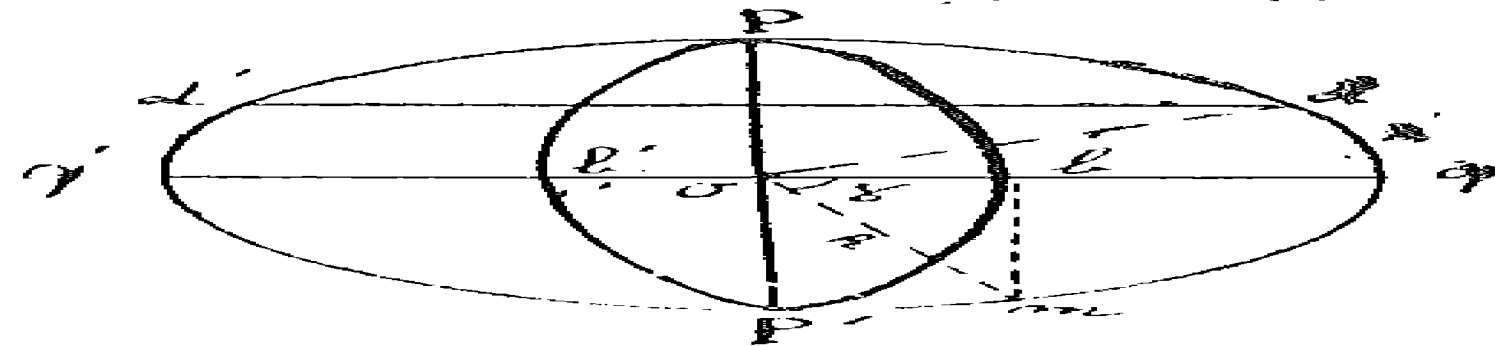
۲ (قوس mm') را مساوی λ جدا می‌کنیم
قطر mm' تصویر نصف
النهار بطول λ می‌باشد
(ش ۲) .

۲ (سطح تصویر در

یکگی از سطح نصف النهار است :
تصویر مدارات و استوار خط‌سوط فصل مشترک آنها با سطح تصویر است .

تصویر مداری عرض λ و تری است موازی استوار
فاصله‌اش از آن روی محیط دایره نصف النهار تصویر λ درجه
است ؛ تصویر هر نصف النهار بطول λ یا 90° است که محور

اطولش خط قطبین و محور اقصارش بطول $2R \cos \gamma$ میباشند .
 طریقه رسم ۱) برای رسم مدارى عرض λ قوس qd را
 مساوى λ جدا مینمائیم و تر dd' که موازى qd' است تصویر
 مدار مفروض میباشد .
 ۲) از نقطه m انتهای شعاع Om که با Oq زاویه γ
 میسازد عمود mb را بر qd' وارد میکنیم و بر سه نقطه P و
 b و P' يك نیمه بیضی و بر P و P' و b' ، قرینه b نسبت به
 O ، نیمه بیضی دیگری میگذاریم بیضی PbP' تصویر نصف-
 النهار بطول γ میباشد (ش ۳) .



خواص و موارد استعمال - در تصویر قائم نواحی
 حول مرکز نقشه نزدیک به حقیقت تصویر میشوند و هرچه از
 مرکز نقشه دورتر شویم دقت نقشه کمتر میشود . طریقه تصویر
 قائم را بیشتر برای تهیه نقشه نواحی قطب زمین و صور قطبی
 آسمان و همچنین تصویر ماه و آفتاب و کرات دور بکار میبرند .

۴۸ - تصویر مرکزی (استروگرافیک)

۱ - تعریف - شماره ۳۰۵ و ۳۰۶ قسمت هندسه
مراجعة شود .

۲ - در تصویر مرکزی زوایا بمقدار حقیقی تصویر میشوند .

۳ - تصویر مرکزی هر دایره دایره است .

رسم نقشه بطریقی تصویر مرکزی

۱ - پاره سطح استوا است و مرکز تصویر یا نقطه دید یکی از قطبین میباشد، تصویر مداری به رخ λ دایره ایست

$$r = R \cos \left(\frac{\lambda}{2} - 45^\circ \right)$$

تصویر هر نصف النهار بطول γ قطری از استوا است که
یا تصویر نصف النهار مبدأ زاویه γ تشکیل میدهد .

۲ - قوس q, m را برابر λ جدا نموده از
نقطه دید V به m وصل میکنیم تا q, q را در نقطه m^- قطع
کند دایره مرکز O و شعاع Om^- تصویر مدار به رخ λ
میباشد .

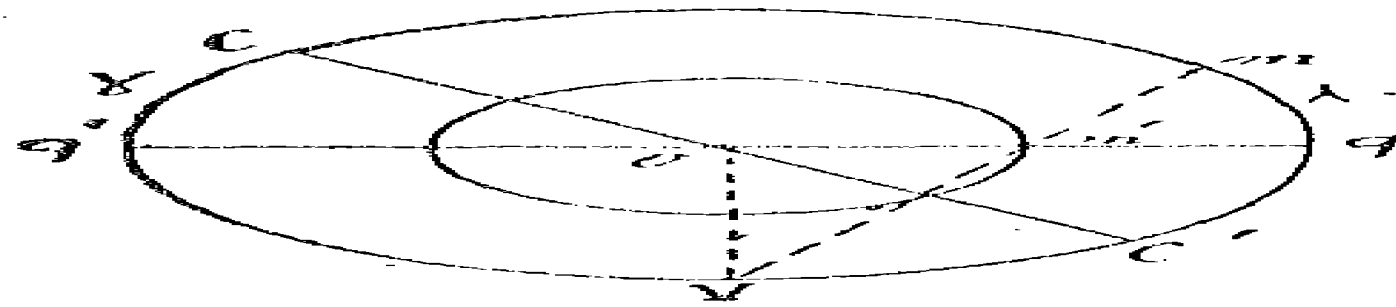
۳ - قوس q, C را مساوی γ جدا میکنیم قطر CC^-
تصویر نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۴) .

۴ - پاره سطح از سطح نصف النهار است و نقطه
دید انتهای قطری از استوا که عمود بر پاره است میباشد

تصویر هر نیمه مدار به رخ λ قوس دایره ایست که مرکز
بر خط قطبین و فاصله $\frac{R}{\sin \lambda}$ از مرکز نصف النهار

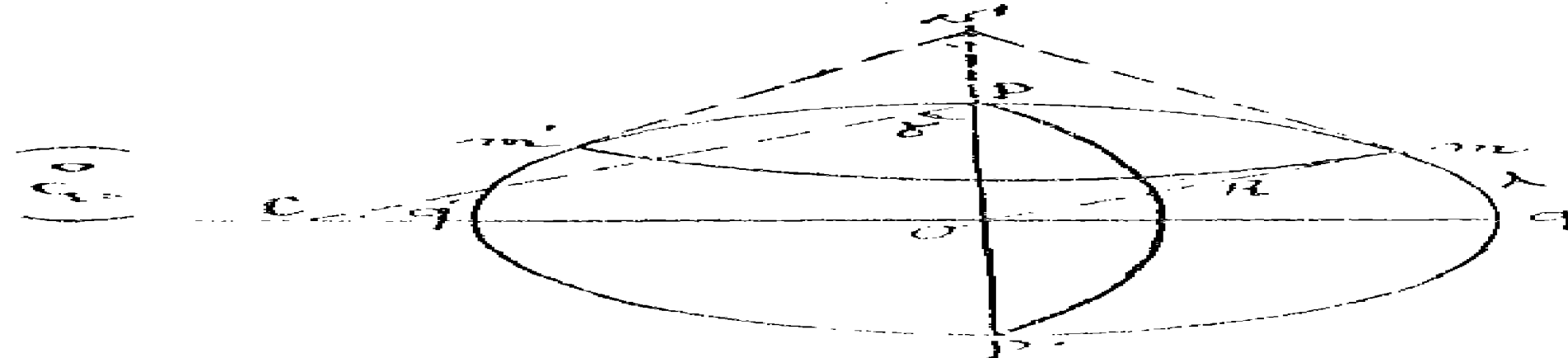
تصویر قرار دارد؛ تصویر هر نصف النهار بطول γ قوس دایره ایست مار بر دو قطب که مرکزش بر قطر عمود بر خط قطب است و بفاصله $\gamma/2$ از مرکز سطح نصف النهار تصویر قرار دارد.

طریقه رسم ۱) قوس مماس mm را مساوی γ جدا نموده mm قطر PP را در S قطع مینماییم قوس mm از این دایره تصویر نیمه مدار عرض γ میباشد. ۲) از P خط PC را چنان رسم میکنیم که با PP زاویه γ بسازد، بر C نقطه تلاقی این خط با شعاع CP دایره ای رسم میکنیم قوس mm' از این دایره تصویر نیمه نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۵).



(ش ۴)

۱) و شعاع CP دایره ای رسم میکنیم قوس mm' از این دایره تصویر نیمه نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۵).



(ش ۵)

خواص و موارد استعمال — در تصویر مرکزی چون زوایا تغییر نمیکنند تصویر مشابه شکل اصلی هستند و ضمناً هر چه از مرکز بجهت نقشه نزدیکتر شویم تصویر به حقیقت نزدیکتر میشود. طریقه تصویر مرکزی را برای تهیه نقشه های مسطحه نیمکره زمین و نقشه های ممالک بکار میبرند.

۹۶ — تهیه نقشه بطریق گسترشی استوائی — استوانه مستدیر قائمی بر یک کره مصنوعی زمین که بهقیاس معین تهیه شده محیط مینمائیم بطوریکه دو قاعده اش بر قطبین کره مماس شوند بعد فعل مشترکهای سطح نصف النهارات و مدارات را با سطح جانبی استوانه بدست میآوریم و استوانه را روی یک صفحه میگذاریم، شبکه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات و مدارات بتدریج بحدود قائم و افقی نموده شده اند. در این گسترش ناحیه استوائی نزدیک به حقیقت نموده شده و هر چه بقطب نزدیکتر شویم فواصل مدارات و دقت نقشه کمتر میشود.

۱۰۰ — تهیه نقشه بی سیاله گسترشی مخروطی — مخروط قائمی معادی مدار متوسط ناحیه کوچکی که میخواهند نقشه آنجا را تهیه میکنند بر کره محیط مینمائند بطوریکه فعل مشترک هر نصف النهار با سطح جانبی مخروط بر یکی از مولد های آن منطبق گردد. فعل مشترک سطح مدارات را نیز با سطح جانبی مخروط بدست آورده و مخروط را بر صفحه ای میگذارند؛ شبکه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات

بنخروط متقاطع در يك نقطه (راس مخروط) و مدارات به دوائر متحدالمرکزی يمرکز راس مخروط نموده شده اند .
این نقشه برای ناحیه کوچکی از کره که در طرفین مدار متوسط آن واقع شده است قابل استفاده میباشد .

۷ - نقشه دیگر

۵۱ - مدار خورشید - خورشید در جهت مستقیم بدور زمین (فرض ثابت بودن) مداری بیضی شکل می نماید که زمین در یکی از کانونهای آن قرار گرفته و خروج از مرکز این بیضی تقریباً $\frac{1}{2}$ - میباشد .

۵۲ - میل دایرة البروج - زاویه بین دایرة البروج و استوای فلکی مساوی 23° و 37° میباشد .

۵۳ - قطر ظاهری خورشید - قطر ظاهری متوسط خورشید $25'$ و $31'$ یا با تقریباً $32'$ میباشد بزرگترین مقدار قطر ظاهری در دیسم (اول ژانویه 35° و 32° و کوچکترین مقدار آن در تیرماه (اول ژوئیه) 32° ، $31'$ است .

۵۴ - اختلاف منظر افقی شمس 8° و $8'$ میباشد

۵۵ - شعاع خورشید - صد برابر شعاع زمین و

مساوی 950000 کیلومتر است

۵۶ - وزن مخصوص آن نسبت بآب 14 و نسبت

بزمین 256 است

۵۷ - جرم خورشید 3233432 برابر جرم زمین است .

۵۸ - حجم خورشید 120000 برابر حجم زمین است .

۵۹ - سنگینی هر جسم در روی استوای خوردشید تقریباً ۲۸ برابر سنگینی آن جسم در روی استوای زمین است .

۶۰ - خوردشید در مدت ۳۳ روز و ۴ ساعت و ۲۹ دقیقه یکمرتبه بدور خود میگردد .

۶۱ - فاصله متوسط زمین از خوردشید ۳۳۴۴۰ برابر شعاع زمین یا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کیلومتر است .

۹۲ - نقطه اوج و نقطه اعتدال - نقطه اعتدال بهاری هر سال تقریباً ۲۶ روز ۵۰ درجهت مخالف (بر خلاف توالی بروج) عقب میروود . یعنی در ۲۶۰۰۰ سال یکبار معدل النهار را طی میکند .

۶۳ - تعیین دو نقطه اعتدال - اگر α و α' بعد و میل خوردشید در ظهر روز قبل از نوروز (نوروز روزیست که خوردشید بنقطه اعتدال بهاری γ میگذرد) و α و α' بعد و میل آن در ظهر روز بعد از نوروز باشند و x بعد نقطه γ باشد :

$$\frac{\sin \alpha' - \sin \alpha}{\sin \alpha' + \sin \alpha} = \frac{\sin x}{\sin \alpha'}$$

بعد نقطه اعتدال پائیزی (خرفی) γ' نیز یکمات همین دستور حساب میشود .

پس از محاسبه معلوم میشود که اختلاف این دو بعد ۱۸۰ درجه است (مبدأ بعد اختیاری است)

۶۴ - تعیین ساعت عبور شمسی بنقطه اعتدال بهاری - اگر t زمان بین ظهر روز قبل از نوروز و ظهر روز بعد از

نوروز و اول و اول میل شمسی در این دو موقع و 'I' زمان بین
ظهر روز قبل از نوروز تا موقع عبور شمس به نقطه γ باشد .

$$d_1 = d_2 \quad d_1 = d_2 \quad d_1 = d_2$$

۶۵ - ساختمان آفتاب - اگر از مرکز گذر به سمت محیط و نیم

از طبقات زیر بترتیب عبور خواهیم کرد :

- ۱ - هسته مرکزی سیال با درجه حرارت بی اندازم زیاد؛
- ۲ - یک سطح درختان موسوم به فوتوسفر یا کره نور که
از گازهای محترقه تشکیل شده و نوری که بنظر ما میرسد از این
طبقه است و کلف های خورشید نیز لکه های سیاهی هستند که
در این طبقه جا دارند ؛
- ۳ - یک اتمسفر بخار موسوم به طبقه تابان که حلیف شمسی
از آن حاصل میشود ؛
- ۴ - یک اتمسفر قرمز رنگ موسوم به کرو موسفر یا کره
رنگین که مخصوصاً از هیدروژن تشکیل یافته ؛
- ۵ - یک طبقه شفاف و سفید رنگ که در موقع کسوف به
شکل طوق سفید دیده میشود .

V I - زمان و تقویم

۶۶ - زمان نجومی II بین طلوع و غروب کوکبی که
فاصله قطبیش 1.2° باشد در مکانی عرض 2° عبارتست از :

$$1.17 \quad 1.18 \quad 1.19$$

۶۷ — روز فجهومی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی مرکز ستاره‌ای از نصف‌النهار معین و طول آن ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است .

۶۸ — روز خورشیدی یا شمسی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نصف‌النهار معین .
طول روز شمسی ثابت نیست زیرا سرعت حرکت آفتاب بر روی دایرة البروج ثابت نمیباشد .

۶۹ — خورشید مجازی خورشیدی است که دایرة البروج را در مساحت خورشید حقیقی با سرعت ثابتی پییماید .

۷۰ — روز شمسی هفتاد و سه فاصله دو عبور متوالی خورشید مجازی است بر نصف‌النهار معین .

۷۱ — ساعت فجهومی ۲۴ روز نجومی و ساعت شمسی ۲۴ روز شمسی حقیقی و ساعت رسمی ۲۴ روز شمسی متوسط است .

۷۲ — سال مداری یا اکتسابی مدت بین دو عبور متوالی خورشید بر نقطه اعتدال بهاریست و عبارتست از:

۵۵ و ۷۵ ثانیه ۸ دقیقه ۵ ساعت ۳۶ و ۳۷ روز ۹ و ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۲ ۱۰۳ ۱۰۴ ۱۰۵ ۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۸ ۱۰۹ ۱۱۰ ۱۱۱ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵ ۱۱۶ ۱۱۷ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱ ۱۲۲ ۱۲۳ ۱۲۴ ۱۲۵ ۱۲۶ ۱۲۷ ۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۰ ۱۳۱ ۱۳۲ ۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۹ ۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴ ۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ۱۵۰ ۱۵۱ ۱۵۲ ۱۵۳ ۱۵۴ ۱۵۵ ۱۵۶ ۱۵۷ ۱۵۸ ۱۵۹ ۱۶۰ ۱۶۱ ۱۶۲ ۱۶۳ ۱۶۴ ۱۶۵ ۱۶۶ ۱۶۷ ۱۶۸ ۱۶۹ ۱۷۰ ۱۷۱ ۱۷۲ ۱۷۳ ۱۷۴ ۱۷۵ ۱۷۶ ۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۹ ۱۸۰ ۱۸۱ ۱۸۲ ۱۸۳ ۱۸۴ ۱۸۵ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۸۹ ۱۹۰ ۱۹۱ ۱۹۲ ۱۹۳ ۱۹۴ ۱۹۵ ۱۹۶ ۱۹۷ ۱۹۸ ۱۹۹ ۲۰۰ ۲۰۱ ۲۰۲ ۲۰۳ ۲۰۴ ۲۰۵ ۲۰۶ ۲۰۷ ۲۰۸ ۲۰۹ ۲۱۰ ۲۱۱ ۲۱۲ ۲۱۳ ۲۱۴ ۲۱۵ ۲۱۶ ۲۱۷ ۲۱۸ ۲۱۹ ۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲ ۲۲۳ ۲۲۴ ۲۲۵ ۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱ ۲۳۲ ۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷ ۲۳۸ ۲۳۹ ۲۴۰ ۲۴۱ ۲۴۲ ۲۴۳ ۲۴۴ ۲۴۵ ۲۴۶ ۲۴۷ ۲۴۸ ۲۴۹ ۲۵۰ ۲۵۱ ۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۴ ۲۵۵ ۲۵۶ ۲۵۷ ۲۵۸ ۲۵۹ ۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۲ ۲۶۳ ۲۶۴ ۲۶۵ ۲۶۶ ۲۶۷ ۲۶۸ ۲۶۹ ۲۷۰ ۲۷۱ ۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۷۷ ۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۰ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۳ ۲۸۴ ۲۸۵ ۲۸۶ ۲۸۷ ۲۸۸ ۲۸۹ ۲۹۰ ۲۹۱ ۲۹۲ ۲۹۳ ۲۹۴ ۲۹۵ ۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸ ۲۹۹ ۳۰۰ ۳۰۱ ۳۰۲ ۳۰۳ ۳۰۴ ۳۰۵ ۳۰۶ ۳۰۷ ۳۰۸ ۳۰۹ ۳۱۰ ۳۱۱ ۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۴ ۳۱۵ ۳۱۶ ۳۱۷ ۳۱۸ ۳۱۹ ۳۲۰ ۳۲۱ ۳۲۲ ۳۲۳ ۳۲۴ ۳۲۵ ۳۲۶ ۳۲۷ ۳۲۸ ۳۲۹ ۳۳۰ ۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۳ ۳۳۴ ۳۳۵ ۳۳۶ ۳۳۷ ۳۳۸ ۳۳۹ ۳۴۰ ۳۴۱ ۳۴۲ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۴۵ ۳۴۶ ۳۴۷ ۳۴۸ ۳۴۹ ۳۵۰ ۳۵۱ ۳۵۲ ۳۵۳ ۳۵۴ ۳۵۵ ۳۵۶ ۳۵۷ ۳۵۸ ۳۵۹ ۳۶۰ ۳۶۱ ۳۶۲ ۳۶۳ ۳۶۴ ۳۶۵ ۳۶۶ ۳۶۷ ۳۶۸ ۳۶۹ ۳۷۰ ۳۷۱ ۳۷۲ ۳۷۳ ۳۷۴ ۳۷۵ ۳۷۶ ۳۷۷ ۳۷۸ ۳۷۹ ۳۸۰ ۳۸۱ ۳۸۲ ۳۸۳ ۳۸۴ ۳۸۵ ۳۸۶ ۳۸۷ ۳۸۸ ۳۸۹ ۳۹۰ ۳۹۱ ۳۹۲ ۳۹۳ ۳۹۴ ۳۹۵ ۳۹۶ ۳۹۷ ۳۹۸ ۳۹۹ ۴۰۰ ۴۰۱ ۴۰۲ ۴۰۳ ۴۰۴ ۴۰۵ ۴۰۶ ۴۰۷ ۴۰۸ ۴۰۹ ۴۱۰ ۴۱۱ ۴۱۲ ۴۱۳ ۴۱۴ ۴۱۵ ۴۱۶ ۴۱۷ ۴۱۸ ۴۱۹ ۴۲۰ ۴۲۱ ۴۲۲ ۴۲۳ ۴۲۴ ۴۲۵ ۴۲۶ ۴۲۷ ۴۲۸ ۴۲۹ ۴۳۰ ۴۳۱ ۴۳۲ ۴۳۳ ۴۳۴ ۴۳۵ ۴۳۶ ۴۳۷ ۴۳۸ ۴۳۹ ۴۴۰ ۴۴۱ ۴۴۲ ۴۴۳ ۴۴۴ ۴۴۵ ۴۴۶ ۴۴۷ ۴۴۸ ۴۴۹ ۴۵۰ ۴۵۱ ۴۵۲ ۴۵۳ ۴۵۴ ۴۵۵ ۴۵۶ ۴۵۷ ۴۵۸ ۴۵۹ ۴۶۰ ۴۶۱ ۴۶۲ ۴۶۳ ۴۶۴ ۴۶۵ ۴۶۶ ۴۶۷ ۴۶۸ ۴۶۹ ۴۷۰ ۴۷۱ ۴۷۲ ۴۷۳ ۴۷۴ ۴۷۵ ۴۷۶ ۴۷۷ ۴۷۸ ۴۷۹ ۴۸۰ ۴۸۱ ۴۸۲ ۴۸۳ ۴۸۴ ۴۸۵ ۴۸۶ ۴۸۷ ۴۸۸ ۴۸۹ ۴۹۰ ۴۹۱ ۴۹۲ ۴۹۳ ۴۹۴ ۴۹۵ ۴۹۶ ۴۹۷ ۴۹۸ ۴۹۹ ۵۰۰ ۵۰۱ ۵۰۲ ۵۰۳ ۵۰۴ ۵۰۵ ۵۰۶ ۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۱۰ ۵۱۱ ۵۱۲ ۵۱۳ ۵۱۴ ۵۱۵ ۵۱۶ ۵۱۷ ۵۱۸ ۵۱۹ ۵۲۰ ۵۲۱ ۵۲۲ ۵۲۳ ۵۲۴ ۵۲۵ ۵۲۶ ۵۲۷ ۵۲۸ ۵۲۹ ۵۳۰ ۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰ ۵۴۱ ۵۴۲ ۵۴۳ ۵۴۴ ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷ ۵۴۸ ۵۴۹ ۵۵۰ ۵۵۱ ۵۵۲ ۵۵۳ ۵۵۴ ۵۵۵ ۵۵۶ ۵۵۷ ۵۵۸ ۵۵۹ ۵۶۰ ۵۶۱ ۵۶۲ ۵۶۳ ۵۶۴ ۵۶۵ ۵۶۶ ۵۶۷ ۵۶۸ ۵۶۹ ۵۷۰ ۵۷۱ ۵۷۲ ۵۷۳ ۵۷۴ ۵۷۵ ۵۷۶ ۵۷۷ ۵۷۸ ۵۷۹ ۵۸۰ ۵۸۱ ۵۸۲ ۵۸۳ ۵۸۴ ۵۸۵ ۵۸۶ ۵۸۷ ۵۸۸ ۵۸۹ ۵۹۰ ۵۹۱ ۵۹۲ ۵۹۳ ۵۹۴ ۵۹۵ ۵۹۶ ۵۹۷ ۵۹۸ ۵۹۹ ۶۰۰ ۶۰۱ ۶۰۲ ۶۰۳ ۶۰۴ ۶۰۵ ۶۰۶ ۶۰۷ ۶۰۸ ۶۰۹ ۶۱۰ ۶۱۱ ۶۱۲ ۶۱۳ ۶۱۴ ۶۱۵ ۶۱۶ ۶۱۷ ۶۱۸ ۶۱۹ ۶۲۰ ۶۲۱ ۶۲۲ ۶۲۳ ۶۲۴ ۶۲۵ ۶۲۶ ۶۲۷ ۶۲۸ ۶۲۹ ۶۳۰ ۶۳۱ ۶۳۲ ۶۳۳ ۶۳۴ ۶۳۵ ۶۳۶ ۶۳۷ ۶۳۸ ۶۳۹ ۶۴۰ ۶۴۱ ۶۴۲ ۶۴۳ ۶۴۴ ۶۴۵ ۶۴۶ ۶۴۷ ۶۴۸ ۶۴۹ ۶۵۰ ۶۵۱ ۶۵۲ ۶۵۳ ۶۵۴ ۶۵۵ ۶۵۶ ۶۵۷ ۶۵۸ ۶۵۹ ۶۶۰ ۶۶۱ ۶۶۲ ۶۶۳ ۶۶۴ ۶۶۵ ۶۶۶ ۶۶۷ ۶۶۸ ۶۶۹ ۶۷۰ ۶۷۱ ۶۷۲ ۶۷۳ ۶۷۴ ۶۷۵ ۶۷۶ ۶۷۷ ۶۷۸ ۶۷۹ ۶۸۰ ۶۸۱ ۶۸۲ ۶۸۳ ۶۸۴ ۶۸۵ ۶۸۶ ۶۸۷ ۶۸۸ ۶۸۹ ۶۹۰ ۶۹۱ ۶۹۲ ۶۹۳ ۶۹۴ ۶۹۵ ۶۹۶ ۶۹۷ ۶۹۸ ۶۹۹ ۷۰۰ ۷۰۱ ۷۰۲ ۷۰۳ ۷۰۴ ۷۰۵ ۷۰۶ ۷۰۷ ۷۰۸ ۷۰۹ ۷۱۰ ۷۱۱ ۷۱۲ ۷۱۳ ۷۱۴ ۷۱۵ ۷۱۶ ۷۱۷ ۷۱۸ ۷۱۹ ۷۲۰ ۷۲۱ ۷۲۲ ۷۲۳ ۷۲۴ ۷۲۵ ۷۲۶ ۷۲۷ ۷۲۸ ۷۲۹ ۷۳۰ ۷۳۱ ۷۳۲ ۷۳۳ ۷۳۴ ۷۳۵ ۷۳۶ ۷۳۷ ۷۳۸ ۷۳۹ ۷۴۰ ۷۴۱ ۷۴۲ ۷۴۳ ۷۴۴ ۷۴۵ ۷۴۶ ۷۴۷ ۷۴۸ ۷۴۹ ۷۵۰ ۷۵۱ ۷۵۲ ۷۵۳ ۷۵۴ ۷۵۵ ۷۵۶ ۷۵۷ ۷۵۸ ۷۵۹ ۷۶۰ ۷۶۱ ۷۶۲ ۷۶۳ ۷۶۴ ۷۶۵ ۷۶۶ ۷۶۷ ۷۶۸ ۷۶۹ ۷۷۰ ۷۷۱ ۷۷۲ ۷۷۳ ۷۷۴ ۷۷۵ ۷۷۶ ۷۷۷ ۷۷۸ ۷۷۹ ۷۸۰ ۷۸۱ ۷۸۲ ۷۸۳ ۷۸۴ ۷۸۵ ۷۸۶ ۷۸۷ ۷۸۸ ۷۸۹ ۷۹۰ ۷۹۱ ۷۹۲ ۷۹۳ ۷۹۴ ۷۹۵ ۷۹۶ ۷۹۷ ۷۹۸ ۷۹۹ ۸۰۰ ۸۰۱ ۸۰۲ ۸۰۳ ۸۰۴ ۸۰۵ ۸۰۶ ۸۰۷ ۸۰۸ ۸۰۹ ۸۱۰ ۸۱۱ ۸۱۲ ۸۱۳ ۸۱۴ ۸۱۵ ۸۱۶ ۸۱۷ ۸۱۸ ۸۱۹ ۸۲۰ ۸۲۱ ۸۲۲ ۸۲۳ ۸۲۴ ۸۲۵ ۸۲۶ ۸۲۷ ۸۲۸ ۸۲۹ ۸۳۰ ۸۳۱ ۸۳۲ ۸۳۳ ۸۳۴ ۸۳۵ ۸۳۶ ۸۳۷ ۸۳۸ ۸۳۹ ۸۴۰ ۸۴۱ ۸۴۲ ۸۴۳ ۸۴۴ ۸۴۵ ۸۴۶ ۸۴۷ ۸۴۸ ۸۴۹ ۸۵۰ ۸۵۱ ۸۵۲ ۸۵۳ ۸۵۴ ۸۵۵ ۸۵۶ ۸۵۷ ۸۵۸ ۸۵۹ ۸۶۰ ۸۶۱ ۸۶۲ ۸۶۳ ۸۶۴ ۸۶۵ ۸۶۶ ۸۶۷ ۸۶۸ ۸۶۹ ۸۷۰ ۸۷۱ ۸۷۲ ۸۷۳ ۸۷۴ ۸۷۵ ۸۷۶ ۸۷۷ ۸۷۸ ۸۷۹ ۸۸۰ ۸۸۱ ۸۸۲ ۸۸۳ ۸۸۴ ۸۸۵ ۸۸۶ ۸۸۷ ۸۸۸ ۸۸۹ ۸۹۰ ۸۹۱ ۸۹۲ ۸۹۳ ۸۹۴ ۸۹۵ ۸۹۶ ۸۹۷ ۸۹۸ ۸۹۹ ۹۰۰ ۹۰۱ ۹۰۲ ۹۰۳ ۹۰۴ ۹۰۵ ۹۰۶ ۹۰۷ ۹۰۸ ۹۰۹ ۹۱۰ ۹۱۱ ۹۱۲ ۹۱۳ ۹۱۴ ۹۱۵ ۹۱۶ ۹۱۷ ۹۱۸ ۹۱۹ ۹۲۰ ۹۲۱ ۹۲۲ ۹۲۳ ۹۲۴ ۹۲۵ ۹۲۶ ۹۲۷ ۹۲۸ ۹۲۹ ۹۳۰ ۹۳۱ ۹۳۲ ۹۳۳ ۹۳۴ ۹۳۵ ۹۳۶ ۹۳۷ ۹۳۸ ۹۳۹ ۹۴۰ ۹۴۱ ۹۴۲ ۹۴۳ ۹۴۴ ۹۴۵ ۹۴۶ ۹۴۷ ۹۴۸ ۹۴۹ ۹۵۰ ۹۵۱ ۹۵۲ ۹۵۳ ۹۵۴ ۹۵۵ ۹۵۶ ۹۵۷ ۹۵۸ ۹۵۹ ۹۶۰ ۹۶۱ ۹۶۲ ۹۶۳ ۹۶۴ ۹۶۵ ۹۶۶ ۹۶۷ ۹۶۸ ۹۶۹ ۹۷۰ ۹۷۱ ۹۷۲ ۹۷۳ ۹۷۴ ۹۷۵ ۹۷۶ ۹۷۷ ۹۷۸ ۹۷۹ ۹۸۰ ۹۸۱ ۹۸۲ ۹۸۳ ۹۸۴ ۹۸۵ ۹۸۶ ۹۸۷ ۹۸۸ ۹۸۹ ۹۹۰ ۹۹۱ ۹۹۲ ۹۹۳ ۹۹۴ ۹۹۵ ۹۹۶ ۹۹۷ ۹۹۸ ۹۹۹ ۱۰۰۰

۷۳ — سال فجهومی مدت زمانی است که به بعد خورشید از مبدأ نقطه اعتدال بهاری ۳۶۵ و ۳۶۶ درجه افزوده شود، یا زمان بین دو عبور متوالی شمس بر نصف‌النهار کوکبی است ثابت و عبارتست از:

۹۵ — ثانیه ۹ دقیقه ۶ ساعت ۳۶۵ روز
 ۷۴ — فصل اول — فواصل زمان بین عبور خورشید از نقاط
 اعتدال و انقلاب را چهار فصل می‌نامند .
 بهار بین نقطه اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی :
 ۲۱ ساعت ۹۲ روز
 تابستان « « انقلاب تابستانی تا اعتدال یائیزی :
 ۱۴ ساعت ۹۳ روز
 پاییز « « اعتدال یائیزی تا انقلاب زمستانی :
 ۱۹ ساعت ۸۹ روز
 زمستان « « انقلاب زمستانی تا اعتدال بهاری :
 ۱ ساعت ۸۹ روز
 ۷۵ — معادله زمان — معادله زمان عبارتست از
 $t_v - t_m$ یعنی تفاضل بین زمان متوسط و زمان حقیقی در
 يك مكان معين و برای خواندن ساعت آفتابی دانستن آن
 حتماً لازم است و تغییرات آنرا جدول زیر نشان میدهد :

تاریخ	اول ژانویه	۱۱ فوریه	۱۶ آوریل	۱۴ مه	۱۴ ژوئن
$t_v - t_m$	دقیقه ۳۰	ثانیه ۹ دقیقه ۱۴	۳۰	ثانیه ۵۲ دقیقه ۳	۳۰
تاریخ	۲۶ ژوئیه	۱ سپتامبر	۳ نوامبر	۲ دسامبر	اول ژانویه
$t_v - t_m$	ثانیه ۱۸ دقیقه ۲	۰	ثانیه ۲۰ دقیقه ۱۶	۰	۳۰ دقیقه ۴

تقویم

۷۶ — سال مداری عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نقطه اعتدال ربیعی .

۷۷ — سال رسمی سالی است مرکب از عدد صحیحی از ایام که در حد اعلائی امکان با سال اعتدالی تطبیق نماید .

۷۸ — تقویم قاعده‌ایست که برای تطبیق سالهای رسمی یا سالهای مداری وضع میگردد .

تقویم در نزد ملل مختلف میانی مختلف داشته و دارد که مهمترین آنها عبارتند از تقویم مصری ، قیصری ، گرگوارى و تقویم جلالی (فارسی) .

۷۹ — تقویم مصری — مصریان سال رسمی را ۳۶۵ روز میگیرفتند ، پس در هر سال در حدود شش ساعت عقب میافتادند . بطوریکه در هر سیصد و شصت و پنج سال ۳ ماه در تعیین فصول اختلاف حاصل میشد و هر فصل جای خود را بفصل دیگر میداد . پس برای اینکه اول بهار رسمی بعد از يك دوره مجدداً با اول بهار واقعی منطبق گردد باید ۱۴۶۰ سال بگذرد تا این دوره ۱۴۶۰ ساله را دوره سونیاك میگفتند .

تقویم قیصری — رومیان نخست سال را ۳۶۴ روز و بعد مانند مصریان ۳۶۵ روز میگیرفتند ولی برای جلوگیری از بی نظمی تاریخ مصری هر چندین سال یکبار چند روز بسال رسمی خود میافزودند تا با سال مداری تطبیق کنند .

در ۴۴۰ سال پیش از میلاد ژول سزار قیصر روم بدستکاری

سوزیژن منجم تصمیم باصلاح تقویم گرفت و هر سه سال را ۳۶۵ روز و سال چهارم (کبیسه) را ۳۶۶ روز مقرر داشت .
تقویم گروگاری - اصلاح قیصری برای تطبیق سال

رسمی باسال مداری کافی نبود و سال رسمی با اندازه ۳۶۵ روز از سال مداری درازتر بود . پاپ گرگوار هشتم بکلمات منجم معروف لیلیو بسال ۱۵۸۲ مقرر داشت که در روز اختلافی را که از موقع اصلاح قیصری بوجود آمده بود اصلاح کنند و روز ۱۴ اکتبر ۱۵۸۲ را ۱۵ اکتبر بدانند و از آن پس در هر چهار سال سه سال کبیسه را غیر کبیسه محسوب نمایند .

اکنون در تاریخ مسیحی سالهایی که دو رقم آخرشان به ۴ قابل قسمت است کبیسه اند مگر آنها که بدو صفر ختم میشوند و سده های آنها بر چهار قابل قسمت نیستند (مانند ۱۹۰۰)

۸۲ - تقویم جلالی - تعدیل گرگواریهم اختلاف بین سالهای رسمی و مداری را کاملاً از بین نمیدارد یعنی در هر دو هزار سال یکروز اختلاف پیدا میشود .

بهترین تعدیلی که تاکنون در تقویم شده است بوسیله عمر خیام و جمعی دیگر مانند عبدالرحمن خازنی در سال ۷۱۴ هجری انجام شده است و اختلاف بین سالهای رسمی و مداری در هر شش هزار سال یکروز است .

در این تقویم در هر دوره سی و سه سال هشت سال کبیسه و ۲۵ سال غیر کبیسه است باین ترتیب که از آغاز دوره هر سه

سال غیر-کپیسه و سال چهارم کپیسه است و در آخر دوره چهار سال غیر کپیسه میباشد.

آغاز دوره سی و سه ساله‌ای که فعلاً در آن هستیم سال
۱۳۱۰ بوده است؛ در این دوره سالهای ۱۳۱۲-۱۳۱۷-۲۱-۲۵-
۲۹-۳۳-۳۷-۴۰ گیسسه میباشند.

۸۲ - تقویم قمری - سال عادی قمری ۱۳۵۲ روز و در سال
های کبیسه ۳۵۵ روز است و مشتمل بر ۱۲ ماه ۲۹ روزه یا ۳۰
روزی است .

ماه قمري با ديدن هلال ماه مشخص ميگردد ولي براي آنكه وضع ثابتي داشته باشند معمولاً يكماه پيشت و نهروزي و ماه ديگر ۳۰ روزه حساب ميشود .

در هر دوره سی ساله یازده سال کپیسته است که عبارتند از سالهای ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۱ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۹.

6/15 - 7/18

۸۴ — مدار ماه — قمر بدو در زمین مدار بیضی شکلی در جهت مستقیم می پیماید که زمین در یکی از کانونهایش قرار گرفته و میل متوسطش نسبت به ایزوالتروج 43° ، $8'$ ، 15° است و این میل در مدت 173 روز بین 5° و $(18'$ و $5^{\circ})$ تغییر میکند.

خروج از مرکز این بیضی تقریباً 0.549 و $\frac{1}{18}$ است.

میباشد.

مخرج از مرکز این بیضی تقریباً ۰.۵۴۹ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ می باشد.

۸۵۔۔۔ دورہ نجومی (ماہ نجومی) — رما نیست

مختصّور بین دو مقدار نه متوالی قمر با يك ستاره ثابت و مدت نش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱۵۰ ثانیه است .

۸۶ — دوره اعتدالی (ماه اعتدالی) — زمان نیست بین دو مقدار نه قمر با نقطه اعتدال ربیعی و یا زمان بین دو مرور متوالی قمر بیک نصف النهار سماوی و مدت نش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱۵۰ ثانیه است .

۸۷ — دوره هلالی (ماه قمری) — زمان نیست محصور بین دو مقدار نه قمر یا شمس و یا بازگشت قمر یا شمس بر هر يك از نصف النهارات و مدت متوسط آن ۲۹ روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و ۲۹ ثانیه است .

۸۸ — فاصله متوسط ماه از زمین — مساوی ۲۵۰۰۰۰۰ کیلومتر است این مقدار مر بوط است باختلاف منظر ماه وقتی که ۲° و $۵۷'$ باشد .

۸۹ — قطار ظاهری متوسط ماه — ۴۷° و $۳'$ و $۳۱'$ و بزرگترین مقدار آن تقریباً $۵۰''$ و $۳۳'$ و کوچکترین مقدارش تقریباً $۲۲''$ و $۲۸'$ میباشد .

۹۰ — اختلاف منظر افقی ماه ۷° و $۲'$ و $۵۷'$ است .

۹۱ — شعاع ماه $۲۷۳/۰$ یا $\frac{۲۷۳}{۱۰}$ شعاع استوائی زمین

یا ۱۷۳۷ کیلومتر است .

۹۲ — وزن محصور من آن نسبت به آب $\frac{۳}{۳۳}$ و نسبت به

زمین $\frac{۶}{۶۰۶}$ است .

۹۳ - جرم ماه - ۱۲۳۰۰۰ یا $\frac{1}{81}$ - جرم زمین است .

۹۴ - حجم ماه - $\frac{1}{40}$ - حجم زمین میباشد .

۹۵ - سطح ماه - $\frac{1}{13}$ - سطح زمین میباشد

۹۶ - وزن اجسام در استوای ماه ۱۶۶۰ برابر و وزن اجسام در استوای زمین است .

۹۷ - دور گشت و خدای ماه - قمر در مدتی مساوی دوره نجومی یا یکماه نجومی یعنی ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱ ثانیه بدور خود میگردد .

۹۸ - قسمتی از ماه که قابل رویت میباشد $\frac{59}{100}$ - سطح

کل آن میباشد .

۹۹ - عقداتی که - نقاط تلاقی مدار ماه با دایره البروج بنام عقدتین موسوم است یکی عقده رأس و دیگری عقده ذنب . قمر پس از عبور از عقده رأس شمالی و پس از عبور از عقده ذنب جنوبی میگردد عقده رأس روزی ۶۳۰ و ۳۰ روزی دایره البروج عقب میرود یعنی در مدت ۶۷۹۳ روز یا تقریباً ۱۸ سال و ۲ سال یکدور دایره البروج را طی مینماید .

VIII - عقده نقره و عقده

۱۰۰ - عقده نقره (گذشتن ماه) - فاصله Δ رأس

مغزو و خططل زمین حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز زمین
بفرش اینک: ۱- شعاع زمین و ۱، قطر ظاهری آفتاب و ۱۱ اختلاف
منظور آن باشد عبارتست از:

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

میتوان در این فورمول به جای چپ زاویه‌های کوچک $۱۶'۲۰'' = \frac{1}{4}$
و $۸۰'۸'' = 1'$ مقدار این زوایا را بر حسب رادیان گذاشت
در اینصورت چنین بدست می‌آید:

$$2161 = 206265 \times \frac{1}{4} - 808$$

۲- بفرش اینک: ۲ عرض ماه در خططل مغروض و ۱ قطر
ظاهری آفتاب و ۱، قطر ظاهری ماه و ۱۱ اختلاف منظور
شورشید و ۱۲ اختلاف منظور ماه باشد:

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

برای اینک: خسوف جزئی بدست دهد:

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

$$P \sin \frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \Delta$$

تغییر میکنند.

۱۰۱ - کسوف - (گرفتن خورشید) - ۱ - فاصله Δ' راس مخروط ظل ماه حاصل از تابش بر آن از مرکز ماه بقرص اینکه ۲ شعاع زمین و l قطر ظاهری خورشید و l' اختلاف منظر آن و l'' قطر ظاهری ماه باشند عبارتست از:

$$\Delta' = \frac{rsin\varphi}{sin\varphi - sinP}$$

میتوان در این فورمول بجای سینوس زاویه \angle کوچک 2° و $16'$ - مقدار آنرا بر حسب رادیان قرار داد لذا با

توجه باینکه نسبت $\frac{sin\varphi}{sinP}$ همان نسبت شعاع ماه به شعاع زمین

یعنی $\frac{3}{11}$ میباشد مقدار Δ' بصورت زیر درمیآید :

$$\Delta' = 591 \times \frac{206265}{962} \times \frac{3}{11} = 338$$

۲ - عرض اینکه λ عرض قمر در لحظه مفروض و l قطر ظاهری آفتاب و l' قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر آفتاب و l'' اختلاف منظر ماه باشد .

برای اینکه کسوف در بعضی از نقاط زمین دیده شود سنی در موقع مقارنه داشته باشیم

$$l' - l'' - l - P - \lambda = 0$$

برای اینکه کدوقف کلی یا حلقوی در بعضی از نقاط زمین دیده شود بایستی داشته باشیم ،

$$d' - d = \frac{1}{2} (P' - P) \quad (1)$$

عبارت $d' - d = \frac{1}{2} (P' - P)$ بین $(۲۴' و ۱')$ و $(۳۴' و ۱')$

و عبارت $d' - d = \frac{1}{2} (P' - P)$ بین $۵۳'$ و $۶۳'$ تغییر میکنند .

1X = قوا قانون هیئت

۱۰۲ - قوانین کپلر - قانون اول - سیارات حول آفتاب در جهت مستقیم بیضی هائی نزدیک بدایره میپیمایند که خورشید در یکی از دو کانون آن قرار دارد .

قانون دوم - مساحتانی که شعاع حامل هر سیاره (خط واصل بین خورشید و سیاره) در زمانهای متساوی میپیماید معادل میباشد .

قانون سوم - مجذورات زمانهای سیارات که سیارات صرف پیمودن مداراتشان میکنند متناسباند با مکعبات مجذور اطول مداراتشان یعنی اگر a و a' زمانهای دوره نجومی و A و A' بترتیب طول مجذور های اطول مدارات دو سیاره باشند :

$$\frac{A^3}{a^3} = \frac{A'^3}{a'^3}$$

۱۰۳ - قانون نیوتون - (قانون جاذبه عمومی) - هر گاه دو ستاره بر طبق قوانین کپلر بدور یکدیگر بگردند بوسیله

مستقیم جرمشان و نسبت عکس معذور فاصله شان یکدیگر را جذب میکنند یعنی اگر m و m' اجرام و a فاصله دو کوکب باشند نیروی جذب آنها نسبت به یکدیگر عبارتست از

$$K \times \frac{mm'}{a^2}$$

K ضریبی است ثابت و عبارتست از قوه جاذبه ایکه واحد جرم بر واحد جرم در واحد فاصله وارد آورد و مقدارش در دستگاه (C.G.S.) عبارتست از $\left(\frac{1}{9800000000000000}\right)$ دین (قانون فوق کلی است و بین هر دو جسم ثابت و برقرار میباشد.)

۲ - سیارات

۱۰۴ - سیارات عمده در دستگاه منظومه شمسی بترتیب از نزدیکترین آنها بخورشید عبارتند از :

۱ - عطارد ۲ - زهره ۳ - زمین ۴ - مریخ ۵ - مشتری ۶ - زحل ۷ - اورانوس ۸ - نپتون

بین مریخ و مشتری دسته سیارات کوچک قرار گرفته اند ۱۰۵ - قانون بک - اعداد ۰، ۲، ۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶ را

که از دومی بعد هر یک دو برابر عدد ماقبل است نوشته و بعد بهر یک ۴ واحد میافزائیم تا حاصل شود ۴، ۷، ۱۰، ۱۶، ۲۸، ۵۲، ۱۰۰ بعد هر یک از آنها را بر ۱۰ قسمت میکنیم حاصل میشود

۴، ۷ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۸ و ۴ و ۵ و ۱۰ این اعداد بترتیب نسبت فواصل سیارات را از خورشید بقاصله زمین از آن با تقریب کمی

نشان میدهند .

جاءه فوجدوا في البيت رجلين من بني النضير

[illegible]

روزہ حرکت انقلابی سبکدوش کو چٹ کہ بین طریغ و مشتری فرار داند از ۳ تا ۱۸ میل این

جہاں اہل و عیال و خیمہ کی آفات آئے

درست است که ۲ و ۳ مشخصات زمین مسابی او بسیار فرخنده است (از)

[illegible]

در تدوین این کتاب

از کتابهای ذیل استفاده شده است

نام نویسنده	نام کتاب
ابو ریحان محمد بیرونی	۱- التفهیم
دکتر محمود مهران	۲- جبر
دکتر محمود مهران - محسن هنر بخش	۳- مکانیک
آقای رضا نجمی (مرتدس الملک)	۴- هیئت
مرحوم علامه حسین رهنما	۵- حساب
TC. Jacquet	۶- خلاصه حساب
TC.NL.	۷- جبر
II. commissaire	۸- جبر و مثلثات
IC. Jacquet	۹- خلاصه جبر
II. Gonal	۱۰- مثلثات
Carlo Bourlet	۱۱- مثلثات
Réunion des professeurs	۱۲- مکانیک
IC. Jacquet	۱۳- خلاصه مکانیک
TC.NL.	۱۴- هندسه
II. commissaire	۱۵- هندسه
»	۱۶- هیئت
IC. Jacquet	۱۷- خلاصه هیئت
Réunion des professeurs	۱۸- هیئت
IC. Noelle et II. Solhan	۱۹- فورمول
TC. Charnet	۲۰- فورمول مکانیک

غلطنامه

صفحه	مستطاب	غلط	صحيح
۵	۱۰	پايد	پايه
۵	۱۶	an	a^n
۵	۲۰	$(ab)^m$	$(ab)^m$
۱۷	۱۶	دوره	دوري
۱۸	۱۶	بين a و b	همچنين بين b و d
		a و c	c و a گذاشته شود
۱۸	۱۶	بين a و b	بين a و b گذاشته شود
۲۰	۴	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot 1}$	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot 1}$
۳۴	۱ \sqrt{a} \sqrt{a}
۳۴	۱ \sqrt{b} \sqrt{b}
۳۴	۱	باقيما	باقيمانده
۳۸	۴	\sqrt{b}	$a\sqrt{b}$
۴۳		مستطاب آخر	مقابل خط كسري قرار گيرد

غلط نامه	غلط	سنگار	۳۵۲
$\sqrt[1]{a^p}$	$\sqrt[1]{a^p}$	۲	۴۴
$a^m m'$	$a^m m'$	سوم از آخر	۴۴
$a^m m'$	$a^m m'$	سطر آخر	۴۴
$a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[1]{a^p}$	۲	۴۵
فیتا	فیتا	۱۲	۴۸
$a^m m'$	$a^m m'$	۲۱	۴۸
a^m	a^m	۲	۴۹
a^m	a^m	۲	۵۶
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	۱۲	۶۲
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	۱۲	۶۴
$\sqrt[1]{a}$	$\sqrt[1]{a}$	۲	۷۰
منتهی و با تکیس	منتهی و با تکیس	۳ از آخر	۷۱
$(a + r)^m$	$(a + r)^m$	۲ از آخر	۷۴
$(a + r)^m$	$(a + r)^m$	۸	۷۹

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۷۹	سطر آخر	$(1+r)p \rightarrow 1$	$(1+r)p \rightarrow 1$
۸۰	۶	از	در
۸۰	سوم از آخر	حاصل	حامل
۸۳	در شکل ۶ محل تلاقی سه محور حرف O گذاشته شود		
۸۳	۳	r^3	r^2
۸۴	۱۱	OPMP	OPMP'
۹۲	۱۱	V	V'
۹۳	۲	$mu'm \rightarrow 1$	$mu'u'm \rightarrow 1$
۹۳	۴	y	y'
۹۳	۱۱	$y' = \dots$	$y' = \dots$
۱۰۳	۲ از آخر	a^{\dots}	$\frac{x}{a}$
۱۰۴	۷ از آخر	و خارج هر دو کسر را $a'b' - a'a'$ میباید	
۱۰۷	۱۲	MM''	MM'
۱۰۹	۷ از آخر	$x - a$	$(x - a)$
۱۰۹	۳ از آخر	α, β	α و β
۱۱۰	۴	$[a, f(a)]$	$[a \text{ و } f(a)]$
۱۱۰	۵	$f^{\vee}(a)$	$f'(a)$
۱۱۱	۲	$+\infty$	$+\infty$
۱۱۱	۲	$\sin m$	$\sin mx$

غلطنامه	غلط	سطر	دفعه
$y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$	۴	۱۱۸
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	۵	۱۱۸
$\cot g x$	$\cot g x$	۶	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	$y = \sin^2 x$	۶	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	$y = \sin^2 x$	۸	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	$y = \sin^2 x$	۸	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	$y = \sin^2 x$	۹	۱۱۸
$b'c'$	$b'c'$ در مخرج	۱۰	۱۲۲
$\log \frac{b}{a}$	$\log \frac{a}{b}$	۱۰	۱۲۲
a^x	a^x	۲	۱۲۲
a^x	a^x	۲	۱۲۲
M^x	M^x	سطر آخر	۱۲۱
$\sqrt{K\pi}$	\sqrt{K}	۴ از آخر	۱۲۱
$\cot g a$	$\cot g a$	۴ از آخر	۱۲۲
$\sqrt{K\pi}$	$K\pi$	۴	۱۲۴
$a = \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$a = \sqrt{1 - \sin^2 x}$	۴ از آخر	۱۲۵
a	a	۷	۱۲۸
a	b	۹	۱۴۱

صفحه	تصحیح	غلط	تصحیح
۱۴۱	۳ از آ خر	- -b	a- -b
۱۴۴	۲	P-o	P-b
۱۴۴	۲	obc	abc
۱۴۶	۵	l_c	l_c
۱۴۹	۲ از آ خر	c	c
۱۵۲	۷	copy =	copy =
۱۵۲	۱۵	در خط از یک نوع	خط از یک نوع
۱۵۵	۷ از آ خر	c	c
۱۵۶	۵	a.B	a.B
۱۵۸	در شکل ۷ در محل تلاقی اضلاع a و b حرف B نوشته شود		
۱۷۳	۹ از آ خر	M _۱	M _۱
۱۷۵	۵ از آ خر	II-C	II-C
۱۷۵	۳ از آ خر	AII	AII
۱۷۷	۲	-]	-]
۱۷۹	در شکل ۶ منحنیهای B و C با هم عوض شوند		
۱۷۹	در شکل ۷ بجای I حرف B نوشته شود		
۱۸۲	۴	ac- -ba	ac- -ba
۱۸۳	۳	قطر	اقطار
۱۸۵	۲ و ۵	√ o = -v	√ o = -v
۱۸۵	۲	a	a

صفت	سطح	خلاصه	صفت
۱۸۵	۱۲	۱۲ و ۱۳	۱۲ و ۱۳
۱۸۶	۲	تماس	تماس
۱۹۳	۴	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰
۱۹۶	۱۰	در هر دو	در هر دو
۱۹۹	۴ از آخر	Mo	Mo
۲۰۱	۸	حجم	حجم
۲۰۵	۲ از آخر	اقطار می باشد	اقطار می باشد
۲۰۸	۱۲	مانند P	مانند P
۲۰۸	۱۲	خط P	خط P
۲۳۴	۲	در	در
۲۳۳	۴	--	--
۲۳۵	۲	پیچید	پیچید
۲۳۸	۱۰	(ش ۳)	(ش ۳)
۲۳۸	۱۴	(ش ۴)	(ش ۴)
۲۴۹	۱	MT	MT
۲۴۹	۱۴	MT	MT
۲۵۰	دو (ش ۷) محل تلاقی AB و خط عمود بر D از A بگذارد	دو (ش ۷) محل تلاقی AB و خط عمود بر D از A بگذارد	دو (ش ۷) محل تلاقی AB و خط عمود بر D از A بگذارد
۲۵۶	۳ از آخر	BA	BA
۲۵۸	۴	MT	MT

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۵۸	نقطه تلاقی $A'M$ و $B'D$ را دور (ش ۷) حرف B بگذارید		صحیح
۲۶۰	۷ از آخر	خط مشترک	مشترک خط
۲۶۱	۷ از آخر	OM	OM
۲۶۲	۱۰ از آخر	دو	دو
۲۷۰	۳ از آخر	ره	راه
۲۷۴	۵ از آخر	nm'	nm'
۲۷۶	۴	— صفحه	— از نقطه صفحه
۲۹۱	۵ از آخر	$\sqrt{R^2 \omega^2}$	$\sqrt{R^2 \omega^2}$
۲۹۲	۸ از آخر	b''	f''
۳۰۳	۶	دو	دو
۳۰۷	۲ از آخر	$OR =$	$OR =$

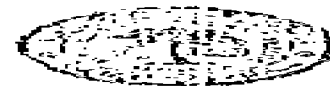
یادداشت

یادداشت

یادداشت

پندرہ

۱۵۱



MUSLIM UNIVERSITY LIBRARY
ALIGARH.

This Book is due on the date last stamped. An
over-due charge of one anna will be charged for
each day the book is kept over time.

۱۵۱

